مقدمة في حساب التغيرات وتطبيقاته

ا.د. فالح بن عمران محمد الدوسري

قسم العلوم الرياضيه –جامعة ام القرى
مكه المكرمه ص . ب ٥٦١٩٩

د. محمد سويلم حمد

قسم الرياضيات –كليه التربيه للبنات
المدينه المنوره ص . ب ٣١٩٣

الطبعه الأولى ١٤٢٦ هـ الموافق ٢٠٠٥ م

المقدمه

الحمدلله الذي خلق الانسان وعلمه البيان ، نحمده على احسانه ونشكره اعترافاً بآلائه ونعمه التي لا تعد ولا تحصى ، والصلاة والسالم على صفوه الأنبياء ورسله سيدنا محمد ، وعلى آله وصحبه أجمعين والتابعين لهم بإحسان الى يوم الدين وبعد ;

فقد اهتم حساب التفاضل والتكامل بالقيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال ، لكثرة تطبيقاتها ، لكنه لا يمكن ان يعلمنا عن ماهية اقل مسافه بين نقطتين معلومتين في مستوٍ ، او اقصر مسافه بين نقطتين معلومتين على سطح معلوم او اقل زمن يستغرقه جسيم للتحرك من نقطةٍ الى اخرى على سطح معين ، او عن شكل المنحنى المغلق ذو المحيط المعلوم الذي يحد اكبر مساحه ممكنه ولا عن شكل المنحنى الذي ينزلق عليه جسيم في اقل زمن ممكن . وللإجابه عن تلك الأسئله ، وإيجاد فرع من الرياضيات يضع الحلول المناسبه لمثل تلك المسائل التي حل بعضها الرياضيان السويسريان يوحنا برنولي (١٦٦٧م – ١٧٤٨م) ويعقوب برنولي (١٦٥٤م - ١٧٠٥م) ، وكذلك الألماني ليبنز (١٦٤٦م -١٧١٦م) ، والأنجليزي نيوتن (١٦٤٢م - ١٧٢٧م) ، والفرنسي لوبتال (١٦٦١م - ١٧٠٤م) فقد وضع السويسري اويلر (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) اساسيات هذا الفرع من التحليل الرياضي معرفاً ما يسمى الداليات Functionals ""دوال من مجموعه الدوال او من فضاء متري الى مجموعه الاعداد الحقيقيه "" ، وأوجد الشرط الضروري (معادله او معادلات اويلر) لوجود القيم القصوى والتي ادت الى حل امثال تلك المسائل وغيرها في الميكانيكا التحليليه والمرونه ، ونشر ابحاثه في هذا المجال سنة ١٧٤١م ، وبعد دراسه الفرنسي لاجرانج (١٧٣٦م – ١٨١٣م) لأعمال اويلر في ١٧٥٥م ، توصل الى نفس الشروط بطريقه اخرى "ولهذا السبب يسمي البعض

معادله اويلر، معادله اويلر - لاجرانج" ، وأرسل ذلك الى اويلر فأعجب بها وسماها حساب التغييرات ، والتي اصبحت عنواناً لهذا الفرع من التحليل الرياضي المهتم بالقيم القصوى للداليات ، والذي تطور ، وحل الكثير من المشاكل في الرياضيات والفيزياء و وضعت شروط ضروريه وكافيه اخرى لوجود القيم القصوى من قبل الفرنسي لجندر (١٧٥٢م – ١٨٣٣م) ، والألمانيان ، جاكوبي (١٨٠٤م – ١٨٥١م) ، وفيرشتراس (١٨١٥ – ١٨٩٧م) وبعد ظهور نظريه التحكم (Control Theory) ، استخدم حساب التغييرات لإستنتاج معادله بلمان التي قدمت اسلوباً آخراً لأشتقاق معادله هاملتون كما استخدم حساب التغييرات من قبل الروسي بونترياجن لحساب دوال التحكم وايجاد الشروط الضروريه للتحكم الأقصى.

ولتزويد القارئ بمقدمه بسيطه عن هذا الموضوع وبعض تطبيقاته وحاجه طلبه الجامعات وكليات البنات الى مرجع باللغه العربيه في هذا المجال نقدم جهدنا المتواضع الذي ضم سته فصول تناولنا الأول منها الداليات وخواصها وابسط مسائل التغييرات بنقاط اطراف ثابته ، ثم مفهوم التغير للداليات الذي بدأ مع كل من اويلر ولاجرانج ثم عمم في اعمال كل من الايطالي فولتيرا (١٨٦٠م – ١٩٤٠م) ، والفرنسي هادمارد (١٨٦٥م – ١٩٦٣) ، اما التغير بمفهومه الحديث فقد ظهر في اعمال الفرنسي جاتيكس ، ثم تناوناالقيم القصوى للداليات وشرط اويلر الضروري لوجود قيم قصوى ، وتناولنا في الفصل الثاني بعض الحالات الخاصه من معادله اويلر - لاجرانج ، والداليات عديده المتغيرات اضافه للداليات المعتمده على مشتقات ذات رتب عليا وداليات بشروط إضافيه و معادله هاملتون وبعض تطبيقاتها ، وتناولنا في الفصل الثالث مسائل التغييرات بداليات ذات تكاملات متعدده والمسأله العكسيه وأشتقاق معادله شرودنجر في الميكانيك الكمي (ميكانيكا الكم) ، اما الفصل الرابع فقد خصص لدراسه مسائل التغييرات بنقاط اطراف متحركه بدأً بأبسط المسائل

ثم الداليات عديده المتغيرات واشتقاق معادله هاملتون ـ جاكوبي ودراسة بعض تطبيقاتها ، ثم دراسه منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنيه وشروطها .

وخصص الفصل الخامس لدراسه الشروط الضروريه والكافيه لوجود قيم قصوى لكل من لجندر وجاكوبي وفيرشتراس ، وتناولنا في الفصل الأخير مبادئ التحكم الأمثل من صياغة المسأله الى قاعده بلمان وتطبيقاتها والشروط الضروريه للتحكم الأقصى ، فقاعده القيمه القصوى وبعض تطبيقاتها . كما اشتمل الكتاب على قائمه للمراجع ودليل الرموز المستخدمه ، إضافه لدليل عربي انجليزي للمصطلحات ، سائلين الله العلي القدير ان يرحمنا ويرحم والدينا ، ويجعل اعمالنا خالصة لوجهه الكريم ، وآخر دعوانا ان الحمد لله رب العاملين.

١٢ ربيع الأول ١٤٢٦ هـ

٢١ – ٤ – ٢٠٠٥ م

❖ المحتوى ❖

الفصل الاول

صياغة المسألة والشروط الضروريه للقيم القصوى

يهتم حساب التغييرات بدراسة القيم العظمى، والصغرى للداليات، ويضم هذا الفصل ثلاثة بنود، تناولنا في الاول منها تعاريف الداليات وبعض انواعها وامثله على ابسط انواع مسائل التغيرات، وتناولنا في الثاني دراسة القيم العظمى والصغرى للداليات وضم البند الثالث الشروط الأساسية، وشرط اويلر الضروري لمعرفة القيم الحرجه وقيم الثبات.

١ -١: الداليات وابسط مسائل التغيرات.

تعريف ١ -١ -١:

اذا كانت F مجموعة الدوال وكانت R مجموعة الاعداد الحقيقيه فتسمى الداله $J : \mathrm{F} \to \mathrm{R}$ دالي (Functional).

إذاً الدالي هو دالة تقرن كل داله او منحني بعدد حقيقي وللداليات صور مختلفه تبعاً لمتغيراتها نذكر منها مايلي:

دالم او منحنى

$$\int_a^b F(x)\,dx \qquad , \qquad J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\,dx$$

$$J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}]\,dx$$

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F[x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n]\,dx$$

وفيما يلي بعض الامثله على الداليات.

مثال ١ -١ -١:

طول القوس (Arc Length) لمنحنى $y=y(x)$ ، في المستوى ، والذي يصل بين النقطتين $A(a\,,\,c)$ ، $A(b\,,\,d)$ يمثل دالي لأن $L:\mathrm{F}\to\mathrm{R}$ ، حيث

$$L[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

مثال ١ -١ -٢ :

اقل مساحه سطحيه S لسطح $z=z(x,y)$ ناتجه من منحنى مغلق تُمثل دالي ايضاً لأن $S:\mathrm{F}\to\mathrm{R}$ ، حيث

$$S[z(x,y)]=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;dx\,dy$$ ،

حيث D هو مسقط السطح على المستوى xy . لاحظ انه يمكن انشاء هذا السطح بغمر سلك رفيع له شكل المنحنى المغلق في سائل صابوني ، ثم رفعه من السائل.

وحيث ان حساب التغيرات يهتم بدراسة طرق تعيين القيم القصوى (العظمى ، والصغرى) للداليات ، فقد اطلق على المسائل المتعلقة بمعرفة القيم القصوى للداليات ، مسائل التغيرات (Variation Problems) ، وفيما يلي بعض الامثله على ابسط انواعها .

مثال ١ -١ -٣ :(مسالة اقصر بعد بين نقطتين في المستوى

(The Geodesics Problems:

إذا كان المستوى هو R^2 فتكون المساله ايجاد منحنى $y=y(x)$ يصل بين نقطتين $A(a,c)$, $B(b,d)$ في المستوى xy ذو اقل طول ممكن ، وفي هذه الحاله يكون الدالي هو طول الخط $L[y(x)]$ ، الذي يجعل قيمة

$$L[y(x)]=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\ dx$$

قيمه صغرى اما اذا كان المستوى هو R^3 ، فقد تكون المسأله هي ايجاد اقصر منحنى يصل بين النقطتين $A,B\in R^3$ ، الواقعتين على السطح $F(x,y,z)=0$ ، وتكون المشكله هي جعل قيمة

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

اقل ما يمكن . ولقد حلت هذه المسأله عام ١٦٩٨ م من قبل الرياضي السويسري يعقوب برنولي (١٦٥٤ – ١٧٠٥م).

مثال ١ -١ -٤ : (مسألة ذات المحيط المعلوم Isoperimetric Problem)

تتعلق هذه المسأله ايجاد منحنى مغلق ذو محيط معلوم يحدد اكبر مساحه ممكنه وهي من اقدم مسائل التغيرات التي شغلت اهتمام الرياضيين.

لاحظ ان طول المنحنى يكون ثابتاً ، كما ان

$$L=\int_{t_\circ}^{t}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,dt$$

هو دائرة كما كان معلوم لقدماء اليونانيين .

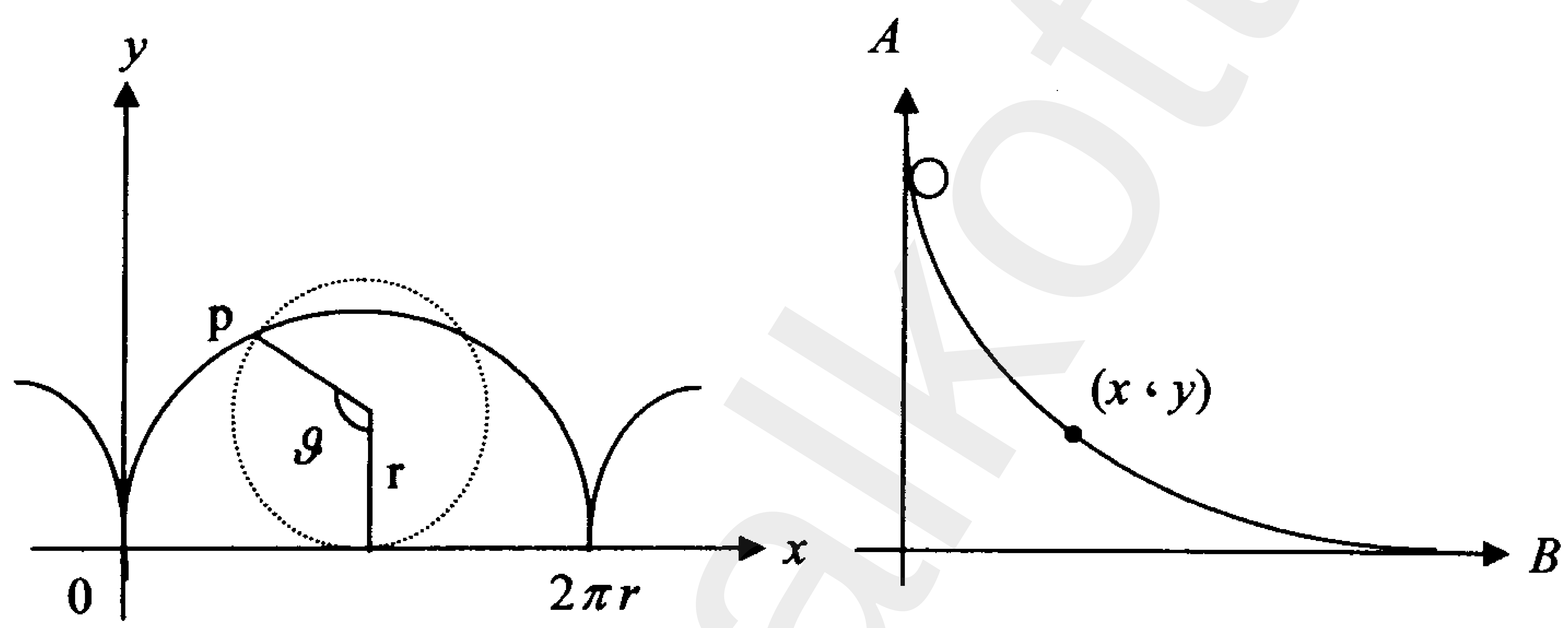
مثال ١ -١ -٥ : (مسألة منحنى اقصر زمن Brachistochrone)

وهي مسألة ايجاد اقصر منحنى يصل بين نقطتين معلومتين في المستوى R^2 بشرط ان انزلاق جسم (خرزه) على ذلك المنحنى بدون احتكاك من $A(0,0)$

الى $B(b, y_1)$ يستغرق اقل زمن ممكن ، واول من قدم الحل لهذه المسأله الرياضي السويدي يوحنا برنولي (١٦٦٧ -١٧٤٨م) عام ١٦٩٦م ، كما حلت من قبل يعقوب برنولي ، والألماني ليبنز (١٦٤٦ -١٧١٦م) والإنجليزي نيوتن (١٦٤٢ -١٧٢٧م) ، والفرنسي لوبيتال (١٦٦١ -١٧٠٤م) لاحظ (كما سنثبت لاحقاً) أن

$$t(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx \text{ ،}$$

حيث g التعجيل او التسارع الأرضي ، $y(0)=0$ ، $y(b)=y_1$ ، كما أن المنحنى المطلوب هو الدحروجي ' cycloid ' وهو المحل الهندسي لنقطه على دائرة متدحرجه على خط مستقيم" شكل (١ -١)



$$x = r(\vartheta - \sin\vartheta)$$
$$y = r(1 - \cos\vartheta)$$

شكل (١ – ١)

والآن ليكن V فضاء متجهات (linear or vector space) على الحقل R ولنقرن مع كل عنصر $v \in V$ العدد الحقيقي $\|v\|$ والذي يسمى معيار أو مقياس (Norm) v بحيث أن

(أ) $\|v\| \geq 0$ ، $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ب) $|\alpha v| = |\alpha| \cdot \|v\|$ لكل $v \in V$ □ $\alpha \in R$

(ج) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ لكل $u, v \in V$

نجد أن (V, d) حيث $d: V \times V \to R$, $d(v,v) = \|v-v\|$ فضاء متري (metricspace) ، وسنهتم بدراسة مسائل التغيرات للداليات في الفضاء ℓ ، D_1 ، D_n حيث ℓ فضاء الدوال المتصله على الفترة $[a, b]$ ، ولكل $f \in \ell$ يكون $\|f(x)\| = \max \cdot |f(x)|$ ، $x \in [a,b]$ واذا كان D_1 فضاء جميع الدوال المتصله على $[a, b]$ والتي تكون مشتقتها الأولى متصله على $[a, b]$ ولكل $f \in D_1$ يكون

$$\|f(x)\|_{D_1} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$
$$= |f(x)|_\ell + |f'(x)|_\ell$$

اما D_n ، $n = 1, 2, \ldots$ فهو فضاء الدوال f المتصله على $[a, b]$ ، والتي تكون مشتقتها $f^{(r)}$ ، $r = 1, 2, \ldots, n$ متصله على $[a, b]$ ولكل $f \in D_n$ يكون

$$\|f(x)\| = \sum_{r=0}^{n} \max_{x \in [a,b]} |\overset{(r)}{f}(x)| = \sum_{r=0}^{n} \|\overset{(r)}{f}(x)\|_\ell \quad \text{حيث} \quad f(x) = f^{(0)}(x)$$

تعريف ١ -١ -٢:

يقال عن دالي $J : F \to R$ ، انه دالي خطي (linear functioned) ، إذا كان

(أ) $J[k\,y(x)] = k \cdot J[y(x)]$ ، لكل $y \in F$ ، $k \in R$

(ب) $J[y_1(x) + y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)]$ لكل $y_1, y_2 \in F$.

مثال ١ -١ -٦ :

اثبت ان الدالي $J[f(x)] = \int_a^b \alpha(x), f(x)\,dx$ دالي خطي حيث $\alpha(x)$ دالة ثابته.

الاثبات:

بما ان

(أ)

$$J[k\,f(x)] = \int_a^b \alpha(x)\,k\,f(x)\,dx$$

$$= k\int_a^b \alpha(x)\,f(x)\,dx = k\cdot J[f(x)]$$

(ب)

$$J[f_1(x)+f_2(x)] = \int_a^b \alpha(x)\,\big(f_1(x)+f_2(x)\big)\,dx$$

$$= \int_a^b \alpha(x)\,f_1(x)\,dx + \int_a^b \alpha(x)\,f_2(x)\,dx$$

$$= J[f_1(x)] + J[f_2(x)]$$

تعريف ١ -١ -٣ :

يقال عن الدالي $J : F \to R$ انه متصل عند النقطه $y = y_0(x)$ ، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$\|y - y_\circ\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|J\big(y(x)\big) - J\big(y_\circ(x)\big)\right| < \varepsilon$$

ومن ثم ان J دالي متصل عند $y = y_0(x)$ ، إذا كان $\lim\limits_{y \to y_\circ} J[y(x)] = J[y_\circ(x)]$.

مثال ١ -١ -٧ :

اثبت ان $J[y(x)] = \int_a^b \alpha(x)\,y(x)\,dx$ بحيث $\alpha(x)$ دالة ثابته ، انه دالي خطي ومتصل في الفضاء ℓ .

الاثبات :

لاحظ ان $J[y(x)]$ دالي خطي حسب مثال (١ -١ -٦) ولكي نثبت ان $J[y(x)]$ دالـي متصـل ، لاحـظ ان $\alpha(x)$ دالـه محـدده ، إذاً $|\alpha(x)| \leq M$ ، M ثابت ، وعليه فأن لكل $\|y - y_0\|_\ell < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$ ، نجد ان

$$|J(y(x)) - J(y_\circ(x))| = \left|\int_a^b \alpha(x)\ (y-y_\circ)\ dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |\alpha(x)|\ |y-y_\circ|\ dx$$

$$\leq M \cdot \max_{x\in[a,b]} |y-y_\circ|\ (b-a)$$

$$\leq M \cdot \|y-y_\circ\|_\ell\ (b-a) < \varepsilon$$

حيث

$$\|y-y_\circ\|_\ell < \frac{\varepsilon}{M\ (b-a)} = \delta$$

مثال ١ -١ -٨ :

اثبت ان الدالي $L : D_1 \to R$ ، حيث $L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ dx$ متصل على D_1 .

الاثبات :

بما ان

$$|L[y(x)] - L[y_\circ(x)]| = \left|\int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2} - \sqrt{1+y_\circ'^2}\right) dx\right| ،$$

إذاً

$$|L[y(x)] - L[y_\circ(x)]| \leq \int_a^b \left|\left(\sqrt{1+y'^2} - \sqrt{1+y_\circ'^2}\right)\right| dx$$

و

$$\sqrt{1+y'^2}-\sqrt{1+y_\circ'^2}=\frac{\left(1+y'^2\right)-\left(1+y_\circ'^2\right)}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_\circ'^2}}$$

$$=\frac{\left(y'-y_\circ'\right)\left(y'+y_\circ'\right)}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_\circ'^2}}$$

إذاً

$$\left|L[y(x)]-L[y_\circ(x)]\right| \leq \int_a^b \frac{\left|y'-y_\circ'\right|\left|y'+y_\circ'\right|}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_\circ'^2}}\,dx$$

لكن المشتقات $y_\circ'$, y' متصله في الفتره المغلقه $[a,b]$ ، اذاً

$$\frac{\left|y'+y_\circ'\right|}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_\circ'^2}} \leq \mathrm{M}$$

وعلاوةً على ذلك فمن تعريف المقياس في الفضاء D_1 نجد ان :

$$\max_{x\in[a,b]}\left|y'-y_\circ'\right| = \left\|y'-y'\right\|_C \leq \left\|y-y\right\|_{D_1}$$

ومن ثم فإن

$$\left|L[y(x)]-L[y_\circ(x)]\right| \leq \mathrm{M}\int_a^b\left|y'-y_\circ'\right|dx$$

$$\leq \mathrm{M}\max_{x\in[a,b]}\left|y'-y_\circ'\right|(b-a)$$

$$\leq \mathrm{M}\left\|y-y_\circ\right\|_{D_1}(b-a)$$

اذاً لكل $\varepsilon>0$ يمكن اختيار $\delta=\varepsilon/\mathrm{M}(b-a)$ ، وعليه فإن لكل $y\in D_1$ حيث $\left\|y-y_\circ\right\|_{D_1}<\delta$ نجد ان

$$\left| L[y(x)] - \qquad \right| \le M(b-a)\| y' - y'_0 \|_{D_1} < \varepsilon$$

إذاً $L[y(x)]$ دالي متصل في

والآن الى بعض الحقائق الأساسيه المتعلقه بالداليات الخطيه المتصله والقضايا الآتيه ، والتي أثبتت عام ١٨٧٩م من قبل الرياضي الألماني باول ديو بوا ريموند (Paul Du Bois Reymon) (١٨٣١ -١٨٨٩م)

<u>قضيه ١ -١ -١</u>: (اويلر- لاجرانج)

اذا كانت $\alpha(x)$ داله متصله على الفتره $[a,b]$ ، وكان $\int_a^b \alpha(x) f(x) = 0$ لكل $f(x) \in \ell$ بحيث ان $f(a) = f(b) = 0$ ، فان $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$.

<u>البرهان</u> :

اذا أثبتنا ان $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$ ، فان اتصال $\alpha(x)$ على $[a,b]$ يؤدي الى كون $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$ ، لذا نفرض ان $\alpha(x^*) \neq 0$ ، $x^* \in (a,b)$. إذاً اما $\alpha(x^*) > 0$ او $\alpha(x^*) < 0$ ، ويكفي ان نثبت القضيه عندما $\alpha(x^*) > 0$ لأنه اذا كانت $\alpha(x^*) < 0$ ، فإن $-\alpha(x^*) > 0$ بما ان $\alpha(x)$ مستمره بالفرض ،اذاً $\alpha(x) > 0$ لكل $x \in (c,d)$ حيث d ، c اعداد حقيقيه تحقق العلاقه $a<c<x^*<d<b$ وعليه اذا كانت

$$f^*(x)=\begin{cases}(x-c)(d-x) & \forall \ x \in [c,d] \\ 0 & \forall \ x \in [a,b]-[c,d]\end{cases}$$ ،

فإن $f^* \in \ell$ ، كما ان $f^*(c) = f^*(d) = f^*(a) = f^*(b) = 0$

إذاً $\int_c^d \alpha(x)\,(x-c)\,(d-x)\;dx = 0$

لكن $\alpha(x) > 0$ بالفرض، $(d-x) > 0\;,\;(x-c) > 0$

اذاً $\alpha(x)\,(x-c)\,(d-x) > 0$ لكل $x \in (c,d)$

وعليه فإن $\int_c^d \alpha(x)\,(x-c)\,(d-x)\,dx > 0$ وهذا تناقض.

اذاً

$\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$

□

ملاحظه : يمكن تعميم القضيه (١ -١ -١) كالآتي

إذا كانت $\alpha\;(x)$ داله متصله على $[a,b]$ ، وكان $\int_a^b \alpha(x)\,f(x)\;dx = 0$ لكل $f(x) \in D_n$ بحيث ان $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(b) = 0$ لكل $r \in N$ ، فإن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$.

ولإثبات تلك العباره نتبع نفس البرهان في قضية (١ -١ -١) ، وجعل

$$f^{*}(x) = \begin{cases} (x-c)^{n+1}\;(d-x)^{n+1} & \forall\;\; x \in [c,d] \\ 0 & \forall\;\; x \in [a,b]-[c,d] \end{cases}$$

نحصل على المطلوب .

قضية ١ -١ -٢ :

اذا كانت $\alpha(x)$ داله متصله على $[a,b]$ ، وكان $\int_a^b \alpha(x)\,f'(x)\,dx = 0$ لكل $f(x) \in D_1$ بحيث ان $f(a) = f(b) = 0$ فإن $\alpha(x) = C$ لكل $x \in [a,b]$ ، حيث $C \in R$.

البرهان :

نفرض ان C معروف بالعلاقه $\int_a^b [\alpha(x) - C]\, dx = 0$ ، ولنفرض ان $\int_a^x [\alpha(\omega) - C]\, d\omega$. إذاً $f(x) \in D_1$ ، كما ان $f(a) = f(b) = 0$. لكن

$$\int_a^b [\alpha(x) - C] f'(x) dx = \int_a^b \alpha(x) f'(x) dx - C \int_a^b f'(x) dx$$
$$= 0 - C\big(f(b) - f(a)\big) = 0$$

كما ان

$$\int_a^b [\alpha(x) - C] h'(x)\, dx = \int_a^b [\alpha(x) - C][\alpha(x) - C] = \int_a^b [\alpha(x) - C]^2\, dx$$

اذا

$$\int_a^b [\alpha(x) - C]^2\, dx = 0$$

وعليه فإن $x(x) - C = 0$ ومنها نجد ان $\alpha(x) = C$ لكل $x \in [a,b]$.

□

قضيه ١ -١ -٣ :

اذا كانـــــت $\alpha\ (x)$ دالــــــه متصـــــله علــــى $[a,b]$ ، وكـــــان $\int_a^b \alpha(x) f''(x)\, dx = 0$ لكـل $f(x) \in D_2$ ، بحيـث ان $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = f'(b) = 0$ ، فـــإن $\alpha(x) = c_0 + c_1 x$ لكـــــل $x \in [a,b]$ ، $c_0, c_1 \in R$.

البرهان :

نفرض ان C_0, C_1 معرفان بالعلاقتين الآتيتين

$\int_a^b [\alpha(x)-C_0-C_1x]\,dx=0$ ، $\int_a^b dx\int_a^x [\alpha(t)-C_0-C_1t]\,dt=0$ ، ولنفـرض ان

$f(x)=\int_a^x dt\int_a^t [\alpha(r)-C_0-C_1r]\,dr$ إذاً $f(x)\in D_2$ كمـــــا ان

$f(a)=f(b)=0$ ، $f'(a)=f'(b)=0$ ، وعليه فإن

$$\int_a^b[\alpha(x)-C_0-C_1x]\,f''(x)\,dx=\int_a^b\alpha(x)\,f''(x)\,dx-C_0\left[f'(b)-f'(a)\right]-C_1\int_a^b x\ f''(x)\,dx$$

$$=0-0-C_1\int_a^b x\ f''(x)\,dx=-C_1\int_a^b x\ f''(x)\,dx$$

$$=-C_1\left[x f'(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\,dx\right]$$

$$=-C_1\left[x\left[f'(b)-f'(a)\right]-\left[f(b)-f(a)\right]\right]=0$$

لكن

$$\int_a^b[\alpha(x)-C_0-C_1x]\,f''(x)\,dx=\int_a^b[\alpha(x)-C_0-C_1x]\,[\alpha(x)-C_0-C_1x]\,dx$$

$$=\int_a^b[\alpha(x)-C_0-C_1x]^2\,dx$$

إذاً $\int_a^b[\alpha(x)-C_0-C_1x]^2\,dx=0$ ، وعليـه فإن $\alpha(x)=C_0+C_1x$ لكل $x\in[a,b]$.

□

<u>قضية ١ -١- ٤</u> :

اذا كـان كـل مـن $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ دالـه متصله على $[a,b]$ وكـان

$\int_a^b[\alpha(x)f(x)+\beta(x)f'(x)]\,dx=0$ لكل $f(x)\in D_1$ بحيث ان

$f(a)=f(b)=0$ ، فإن $\beta(x)$ قابله للأشتقاق و $\beta'(x)=\alpha(x)$ لكل

. $x \in [a,b]$

البرهان :

لتكن $A(x) = \int_a^x \alpha(t)\, dt$ ، إذاً $A'(x) = \alpha(x)$ ومن التكامل بالتجزيء ، نجد ان

$$\int_a^b \alpha(x)\, f(x)\, dx = A(x)\, f(x)\Big|_a^b - \int_a^b A(x)\, f'(x)\, dx$$

$$= A(x)\left[f(b) - f(a)\right] - \int_a^b A(x)\, f'(x)\, dx$$

$$= 0 - \int_a^b A(x)\, f'(x)\, dx = -\int_a^b A(x)\, f'(x)\, dx$$

وعليه فإن

$$\int_a^b \left[\alpha(x)\, f(x) + \beta(x)\, f'(x)\right] dx = \int_a^b \left[-A(x) + \beta(x)\right] f'(x)\, dx = 0$$

إذاً $\beta(x) - A(x) = C$ حسب قضية (١ -١ -٢) وعليه فإن $\beta'(x) = A'(x)$

لكن $A'(x) = \alpha(x)$ إذاً $\beta'(x) = \alpha(x)$ لكل $x \in [a,b]$.

□

١ -٢ : القيم القصوى للداليات

تعود دراسة التغير بالنسبة لبعض الداليات الى كل من اويلر ولجرانج ، ثم عممت تلك المفاهيم في اعمال كل من الايطالي فولتيرا (١٨٦٠ – ١٩٤٠م) ، والفرنسي هادمارد (١٨٦٥ – ١٩٦٣م) ، اما التغير بمفهومه الجديد فقد ظهر في اعمال الفرنسي جاتكس (Gateaux) ولتعريف التغير بمفهومه الجديد ، لاحظ انه اذا كان $\mathfrak{X}$ فضاءً معيارياً (مترياً) ، فإن المجموعه $\{y \in \mathfrak{X} \,|\, \|y - x\| < r\}$ كره كره مركزها x ونصف قطرها r ويرمز عادةً لتلك الكرة بالرمز $B_r(x)$ ، ويقال عن مجموعه جزئية D من $\mathfrak{X}$ انها مجموعه مفتوحه (open set) ، إذا

كـان لكـل $x \in D$ نجـد ان $B_r(x) \subseteq D$. ويقـال عـن مجموعـه جزئيـه D انهـا مجموعه مغلقة إذا كانت مكملتها مجموعه مفتوحه .

<u>مثال ١ -٢ -١</u> :

اذا كانت $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ نقطتين في R^2 ، وعرفنا

$$\|A - B\| = d(AB) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

نجـد ان R^2 فضـاء مـتري كمـا ان $D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid a < x < b \,,\, c < y < d\}$ مجموعه جزئيـه مفتوحـه مـن R^2 ، لأن لكل $P(x, y) \in D$ يوجد $B_r(P) \subseteq D$ حيث

$$0 < r = \min\{x - a, b - x, y - c, d - y\} \in \mathrm{R}$$

والآن الى تعريف التغيّر بالنسبه للداليات .

<u>تعريف ١ -٢ -١</u> :

إذا كان J دالياً معرفاً على المجموعه الجزئيه المفتوحه D من الفضاء المتري $\ast$ ، فيقال ان للدالي J تغير عند النقطه $x \in D$ ، إذا وجد دالي δJ تكون قيمة $\delta J(x, h)$ معرفه لكل $h \in \ast$ و $\delta J(x, h) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{J(x + \varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon}$.

إذاً $\delta J(x, h) = \dfrac{d}{d\varepsilon}\left(J(x + \varepsilon a h)\right)\Big|_{\varepsilon = 0}$ ، كما ان $\delta J(x, 0) = 0$ ،

$$\delta J(x, ah) = \frac{d}{d\varepsilon}\left(J(x + \varepsilon a h)\right)\Big|_{\varepsilon = 0} = a \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(J(x + \alpha h)\right)\Big|_{\alpha = 0} = a\,\delta J(x, h)$$

وبالتعويض عن h بالرمز Δx ، نجد ان

$$\delta J(x,\Delta x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(x+\varepsilon\Delta x) - J(x)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon=0}$$

<u>مثال ١ -٢ -٢</u> :

احسب التغير للدالي

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x\ ,\ y(x)\ ,\ y'(x))\, dx$$

ثم اوجد $\delta J(y,\Delta y)$ **عندما** $F(x,y,y') = \sqrt{\dfrac{1+(y')^2}{2g(y_\circ - y)}}$.

<u>الحل</u> :

بما ان $J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\, dx$ ، إذاً

$$J(y+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b F(x, y+\varepsilon\Delta y\ ,\ y'+\varepsilon\Delta y')\, dx$$

وعليه فإن

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon\Delta y) = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x, y+\varepsilon\Delta y\ ,\ y'+\varepsilon\Delta y')\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon} F(x, y+\varepsilon\Delta y\ ,\ y'+\varepsilon\Delta y')\, dx$$

كن

$$\frac{\partial F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial y'}\Delta$$

سب قاعدة السلسله ، إذاً

$$\frac{\partial F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\cdot\Delta y$$

يه فإن

$$\delta J(y,\Delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\cdot\Delta y'\right] dx$$

وعندما

$$F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_\circ - y)}}$$

نجد ان

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} = \frac{1}{2\,(y_\circ - y)}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_\circ - y)}}$$

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(y_\circ - y)\,[1+(y')^2]}}$$

وعليه فإن

$$\delta J(y,\Delta y) = \int_a^b \left[\frac{1}{2\,(y_\circ - y)}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_\circ - y)}} \cdot \Delta y + \frac{y'\,\Delta y}{\sqrt{2g(y_\circ - y)\,[1+(y')^2]}} \right] dx$$

□

والآن الى تعريف القيم القصوى للداليات ودراسة خواصها

تعريف ١ -٢ -٢ :

لتكن D مجموعه جزئية غير خاليه في الفضاء المتري *، ولتكن $y_\circ \in D$ ، J دالياً على D.

(ا) يقال عن $J(y_\circ)$ انها قيمه عظمى محليه (Local Maximum Value) للدالي J ، إذا وجدت كره $B_r(y_\circ)$ ، بحيث ان $J(y) \le J(y_\circ)$ لكل $y \in D \cap B_r(y_\circ)$.

(ب) يقال عن $J(y_\circ)$ انها قيمه صغرى محليه (Local Minimum Value) للدالي J إذا كان $J(y) \ge J(y_\circ)$ لكل $y \in D \cap B_r(y_\circ)$.

(ج) يقال عن $J(y_\circ)$ انها قيمه قصوى (Extremum Value) للدالي J عند $y_\circ \in D$ إذا كانت $J(y_\circ)$ قيمه عظمى او صغرى للدالي J ، وتسمى القيمه

القصوى قيمه قصوى ضعيفه إذا كان للفرق $\Delta J(y)$ نفس الاشاره لكل $y \in D_1$ ، وتسمى قيمه عظمى قويه إذا كان للفرق $\Delta J(y)$ نفس الاشاره لكل $y \in \ell$ ، ولإيجاد العلاقة بين القيم القصوى للداليات والتغير ، نورد مايلي .

<u>مبرهنه ١ -٢- ١-</u> :

اذا كان للدالي J المعرف على المجموعة الجزئية المفتوحه D في الفضاء المتري $*$ ، قيمة قصوى عند $y_\circ \in D$ ، وكان للدالي J تغيراً عند $y_\circ$ ، فإن $\delta J(y_\circ, h) = 0$ لكل $h \in *$.

<u>البرهان:</u>

نفرض ان $J(y_\circ) \in D$ قيمه صغرى محليه للدالي J ، إذاً $J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ) \geq 0$ لكل الاعداد الصغيره ε ، ولكل $h \in *$ ، وعليه فإن $\dfrac{J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ)}{\varepsilon} \geq 0$ لكل الاعداد الصغيرة الموجبه ε ، بينما $\dfrac{J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ)}{\varepsilon} \leq 0$ لكل الاعداد الصغيره السالبه ε . وبالتالي فإن

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon < 0}} \frac{J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ)}{\varepsilon} \leq 0 \quad , \quad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ)}{\varepsilon} \geq 0$$

إذا كانت تلك النهايات موجوده . إذاً

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ)}{\varepsilon} = 0$$

لكل نقطه نهايه صغرى $y_\circ \in D$ ، عندما تكون تلك النهايه موجوده .

وبالمثل نجد ان

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ)}{\varepsilon} = 0$$

عندما $y_\circ \in D$ نقطة (منحني) نهاية عظمى . لكن

$$\delta J(y_\circ, h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y_\circ + \varepsilon h) - J(y_\circ)}{\varepsilon}$$ ، إذاً $\delta J(y_\circ, h) = 0$.

□

ملاحظه: إذا كانت $\delta J(y_\circ, h) = 0$ لكل $h \in \aleph$ ، فإن ذلك قد لايعني ان $J(y_\circ)$ قيمه قصوى للدالي J ، كما يوضح ذلك المثال الآتي.

مثال ١ -٢ -٣ :

(أ) إذا كان $J: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ، وكان $J(x) = x^3$ لكل $J \in \mathrm{R}$ ، فإن $\delta J = J'$ وعليه فإن $J'(0) = 0$ ، بينما $J(0)$ ليست قيمه قصوى للداله J .

(ب) إذا كان $J: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ ، $J\left(x=(x_1\, , \, x_2)\right) = x_2^2 - x_1^2$ لكل $(x_1\, , \, x_2) \in \mathrm{R}^2$ ، فإن

$$\delta J(x,h) = \frac{\partial J}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial J}{\partial x_2} h_2 = -2x_1 h_1 + 2x_2 h_2$$

لكل $h = (h_1\, , \, h_2) \in \mathrm{R}^2$ اذاً $\delta J(0\, , 0) = 0$ ، لكن $J(0\, , 0)$ ليست قيمه قصوى للدالي J .

١ -٣ : شرط اويلر الضروري (Euler's Necessary Condition)

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على تحديد الشرط الضروري المؤدي الى مايعرف بمعادلة اويلر لاجرانج التي تؤدي الى معرفة القيم الحرجه او قيم الثبات (Stationary Values) للداليات ، إضافة الى بعض التطبيقات .

مبرهنه ١ -٣ -١ :

إذا كان للدالي $J(y) = \int_a^b F\left(x\, , \, y\, , \, y'\right) dx \in \mathrm{D}_1$ ، حيث $y(a) = A\, , \, y(b) = B$ قيمه قصوى على المنحني $y(x)$ ، فإن

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \dots (1)$$

أي ان الشرط الضروري لأمتلاك $J(y)$ قيماً قصوى عند $y(x)$ هو تحقيق $y(x)$ للمعادله التفاضليه (١).

__البرهان__

بما ان $\delta J(y,\Delta y) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot \Delta y'\right) dx$ حسب مثال (١ -٢ -٢) ، إذاً

$$\delta J(y,\Delta y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\cdot \Delta y \; dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot \Delta y' \, dx$$

لكن بالتكامل بالتجزئه ، نجد ان

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot \Delta y' \, dx = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot \Delta y\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot \Delta y \, dx$$

وحيث ان $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$ ، إذاً

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot \Delta y' \, dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot \Delta y \, dx ،$$

وعليه فإن

$$\delta J(y,\Delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \Delta y \, dx$$

لكن للدالي $J(y)$ قيمه قصوى عند $y = y(x)$ ، إذاً $\delta J(y,\Delta y) = 0$ حسب مبرهنه (١ -٢ -١) ، وعليه فإن $\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \Delta y \, dx = 0$ ، لكن Δy داله متصله على $[a,b]$ ، إذاً $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ حسب قضية (١ -١ -١) .

□

تُعرف المعادله (١) بمعادلة اويلر نسبة للرياضي اويلر الذي توصل اليها عام ١٧٤١م ، وبعد دراسة لانجرانج لأعمال اويلر توصل عام ١٧٥٥م الى نفس المعادلة بطريقة اخرى وكان عمره ١٩ سنه فارسل ذلك الى اويلر الذي اثنى اليه

كثيراً واطلق على تلك الطريقه حساب التغيرات ، ولهذا السبب تسمى المعادله (١) بمعادلة اويلر ـ لانجرانج ، والتي تساعد على ايجاد القيم القصوى وقيم التوقف او الثبات للداليات .

ملاحظه: حيث ان $\frac{\partial F}{\partial y'} = Fy'$ ، $\frac{\partial F}{\partial y} = Fy$ ، $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_{xy'} + F_{yy'} \cdot y' + F_{y'y'} \cdot y''$

إذاً معادلة اويلر ـ لاجرانج هي

$$(F_{y'y'}) \cdot y'' + (F_{yy'}) \cdot y' + (F_{xy'}) - F_y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ، تُسمى منحنيات تكاملاتها $y = (y, x, C_1, C_2)$ المنحنيات الحرجه او منحنيات التوقف والتي قد تكون منحنيات قيم قصوى للدالي $J(y)$.

والان الى بعض التطبيقات والأمثله الآتيه

مثال ١ -٣ -١ :

أوجد المنحنيات التي قد يكون للدالي $J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\, dx$ قيم قصوى عليها حيث $y(0) = 0 \;,\; y(\pi/2) = 1$.

الحل

حيث ان $F = y'^2 - y^2$ إذاً $F_y = -2y \;,\; F_{y'} = 2y' \;,\; \frac{d}{dx}F_{y'} = 2y''$.

وبالتالي فإن معادله أويلر ـ لاجرانج

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

تأخذ الصورة $y'' + y = 0$ ، وحل هذه المعادله هو

$$y = C_1 \, Cos\, x + C_2 \, Sin\, x$$

وبإستخدام الشروط الحدية (الإبتدائيه) نجد ان $C_1 = 0 \;,\; C_2 = 1$ ومن ثم فإن $y = Sin\, x$ هو المنحني الذي توجد عليه القيم القصوى للدالي

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\, dx$$

مثال ١ -٣ -٢ :

على أي منحنى يمكن للدالي التالي

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)\, dx$$

حيث $y(1) = 1$, $y(0) = 0$ **، ان يحصل على قيمه القصوى**

الحل

معادلة اويلر ـ لاجرانج $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ **تأخذ الصوره** $y'' = 6x$ **، وحل هذه المعادله هو**

$$y = x^3 + C_1 x + C_2$$

وبإستخدام الشروط الحديه نجد ان $C_1 = C_2 = 0$ **، إذاً يمكن الحصول على القيم القصوى للدالي** $J(y)$ **على المنحني** $y = x^3$ **.**

مثال ١ -٣ -٣ :

اوجد معادلة المنحني الواصل بين النقطتين $(0,0)$, $(1,e)$ **، والذي يجعل للدالي** $J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 - 2ye^x)\, dx$ **قيمة توقف .**

الحل

بما ان $F(x,y,y') = (y^2 + y'^2 - 2ye^x)$ **،** $y(1) = e$, $y(0) = 0$

إذاً $F_{y'} = 2y'$, $F_y = 2y + 2e^x$

وتصبح معادلة اويلر كالآتي

$$2y + 2e^x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

وعليه فإن $y + e^x - y'' = 0$

وبالتالي فإن $y'' - y = e^x \quad \ldots (1)$

وهي معادلة تفاضليه من الرتبة الثانية حلها العام هو $y = y_C + y_P$ ، حيث y_C هو حل للمعادله المتجانسة $y'' - y = 0$ ، y_P هو الحل الخاص للمعادله غير المتجانسه (1) . لكن $y_C = Ae^{-x} + Be^{x}$ ، $y_P = \frac{1}{D^2 - 1}(e^x) = \frac{1}{2} x e^x$

إذاً $y_C = Ae^{-x} + Be^{x} + \frac{1}{2} x e^{x}$ ، وبإستخدام الشروط الحديه

$y(1) = e$ ، $y(0) = 0$ ، نجد ان $A + B = 0$ ، $Ae^{-1} + Be = \frac{1}{2} e$

وعليه فإن $B = \dfrac{e^2}{2(e^2 - 1)}$ ، $A = \dfrac{e^2}{2(1 - e^2)}$

وبالتالي فإن $y = \dfrac{e^2}{2(e^2 - 1)} \, [e^{x} - e^{-x}] + \frac{1}{2} x e^{x}$

$$y = \frac{e^2}{(e^2 - 1)} \, Sinh x + \tfrac{1}{2} x e^{x}$$

هو المنحني الذي يجعل للدالي $J(y)$ قيمة توقف .

<u>ملاحظه</u> : على الرغم من كون معادله اويلر . لاجرانج معادله تفاضليه من الرتبه الثانيه ، الى انه قد يكون للدالي $J(y)$ قيمه قصوى على منحنٍ $y(x)$ لكن $y''(x)$ غير موجوده كما يوضح ذلك المثال الآتي :

ليكن $J(y) = \int_{-1}^{1} y^2 (2x - y')^2 \, dx$ ، $y(-1) = 0$ ، $y(1) = 1$. إذاً معادله اويلر ـ لاجرانج هي $y^2 y'' + y y'^2 - 2y^2 - 4x^2 y = 0$ وهي معادله تفاضليه من الرتبه الثانيه . لاحظ ان $J(y) = 0$ قيمه صغرى للدالي $J(y)$ على المنحني

$$y(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

وبالرغم من ذلك فإن $y''(0)$ غير موجوده .

والآن الى المبرهنه الآتيه .

مبرهنه ١ -٣- ٢- :

لتكن $y = y(x)$ داله مشتقتها الأولى متصله ، كما ان $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ فإذا كانت المشتقات الجزئيه الأولى والثانيه للداله $F(x,y,y')$ بالنسبه الى كل من x , y , y' متصله (مستمره) ، وكان $F_{y'y'} \neq 0$ فان $y''(x)$ موجوده ومتصله عند كل النقاط (x,y) .

البرهان

بما أن

$$\Delta F_{y'} = F_{y'}(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y') - F_{y'}(x,y,y')$$
$$= \Delta x \overline{F}_{y'x} + \Delta y\, \overline{F}_{y'y} + \Delta y' \overline{F}_{y'y'}$$

حيث $F_{y'x} = \lim_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'x}$ ، $\lim_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'y} = F_{y'y}$ ، $\lim_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'y'} = F_{y'y'}$ ، لأن المشتقه الثانيه للداله $F(x,y,y')$ موجوده ومتصله إذاً

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\overline{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right)$$

لكن من معادله اويلر. لاجرانج ، نجد ان

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_y$$

إذاً $\lim_{\Delta x \to 0} \left(\overline{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right)$ موجود . لكن $\lim_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'x} = F_{y'x}$ و y' موجوده ، $F_{y'y}$ متصله ، اذاً $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{y'y} = y' F_{y'y}$ ، وعليه فان $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} . \overline{F}_{y'y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} . F_{y'y'}$ موجوده . اذاً $y'' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x}$ موجوده .

وحيث ان $F_y - F_{xy'} - F_{yy'} . y' - F_{y'y'} . y'' = 0$ و $Fy'y' \neq 0$

اذاً $y'' = \dfrac{F_y - F_{xy'} - F_{yy'} . y'}{F_{y'y'}}$ وهي داله متصله لكل النقاط (x , y) .

□

<u>**تمارين**</u>

(١) اثبت ان $J[y(x)] = \int_0^1 (Sin\,x) y^3(x) dx$ دالي متصل في D_1

(٢) اثبت ان $J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$ دالي غير خطي في الفضاء ℓ

(٣) اثبت ان كلاً مما يأتي دالي خطي

(أ) $J[f(x)] = \int_a^b f(x) dx$

(ب) $L[y(x)] = \int_a^b [p(x) y(x) + q(x) y'(x)] dx$

(٤) هل ان $J[y(x)]$ دالي خطي في D_1 عندما

(أ) $J[y(x)] = \int_0^1 x^2 \; y(x)\; dx$

(ب) $J[y(x)] = \int_0^1 x^2 \; y^2(x)\; dx$

(جـ) $J[y(x)] = \int_{1/2}^1 (Sin\,x)\; y(x)\; dx$

(٥) احسب $\delta J\,[y, \Delta y]$ عندما

(أ) $J(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2}\; dx$

(ب) $J(y) = \int_a^b x^2 \; (y')^2 \; dx$

(٦) ادرس الداليات الآتيه من حيث وجود منحنيات القيم القصوى

$y(1)=1$ ، $y(0)=0$ ، $J(y) = \int_0^1 x\,y\,y' \; dx$ (أ)

$y(1)=2$ ، $y(0)=1$ ، $J(y) = \int_0^1 \left(xy + y^2 - 2y^2 y'\right) dx$ (ب)

$J(y) = \int_a^b \left(y^2 - y'^2 - 2y\,Sin\,x\right) dx$ (جـ)

$J(y) = \int_a^b \left(y^2 - y'^2 - 2y\,Cosh\,x\right) dx$ (د)

$y(3)=2$ ، $y(1)=1$ ، $J(y) = \int_1^3 \left(x^2 y'^2 - yy'\right) dx$ (هـ)

$y(1)=0$ ، $y(0)=0$ ، $J(y) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y'^2 + y' + yy' + y\right] dx$ (و)

(٧) اوجد الحل العام لمعادلة أويلر لاجرانج ، بالنسبه للدالي

$$J(y) = \int_a^b f(x)\,(1+y'^2)^{1/2}\; dx$$

ثم حدد ذلك الحل عندما

$f(x) = x^{1/2}$ (أ) $\qquad$ $f(x) = x$ (ب)

(٨) اوجد القيم القصوى للدالي

$$J(y) = \int \sqrt{x^2+y^2}\,.\sqrt{1+y'^2}\; dx$$

ملاحظه : استخدم الإحداثيات القطبيه .

(٩) اوجد معادله اقصر منحنى يصل بين النقطتين (x_0, y_0, z_0) ،

(x_1, y_1, z_1) الواقعتين على الأسطوانه الدائريه القائمه

$$z = z(0) \quad , \quad y = a\,Sin\,\vartheta \quad , \quad x = a\,Cos\,\vartheta$$

لاحظ ان $F = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2}$ "

الفصل الثاني

مسائل التغيرات بنقط اطراف ثابته

يضم هذا الفصل اربعة بنود ، تناولنا في الأول منها بعض الحالات الخاصه من معادلات اويلر – لاجرانج وتكاملاتها ، اما في البند الثاني فقد درسنا الداليات متعدده المتغيرات اضافة الى الشكل القانوني لمعادلات اويلر – لاجرانج ، وقاعدة هاملتون وبعض تطبيقاتها ، وتناولنا في البند الثالث الداليات التي تعتمد على مشتقات ذات رتب عليا والحصول على ما يسمى معادله اويلر - بواسون اما البند الرابع فقد خصص لدراسه الداليات بشروط اضافيه وبعض تطبيقاتها .

٢ -١: حالات خاصه من معادلة اويلر – لاجرانج

يضم هذا الجزء خمس حالات خاصه من معادلة اويلر – لاجرانج وبعض تطبيقاتها الهندسيه والفيزيائيه

٢ -١ -١ اذا كانت F لاتعتمد على y' :

في هذه الحاله تكون $F = F(x, y(x))$ ، وعليه فان معادلة اويلر هي $F_y\ (x, y) = 0$ ، وحل هذه المعادله لايحوي أي ثوابت اختياريه وبالتالي فإنه لايحقق الشروط الحديه $y(a) = y_0\ ,\ y(b) = y_1$ ومن ثم لايوجد حل لمسألة التغيرات هذه الاّ عندما يمر المنحنى $F_y\ (x, y) = 0$ بالنقاط الحديه $(a, y_0)\ ,\ (b, y_1)$ ، فيكون للدالي قيم قصوى على ذلك المنحنى .

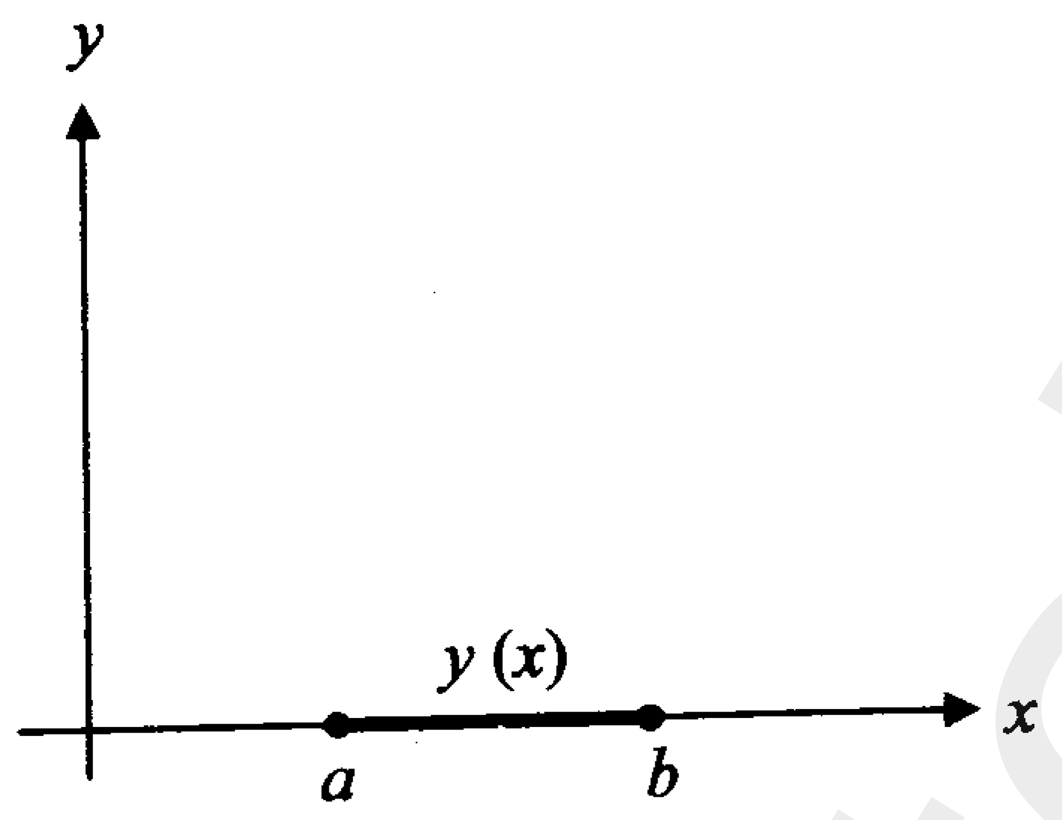
مثال ٢ -١ -٢ :

ليكن $J[y] = \int_a^b (x-y)^2\ dx$. إذاً $F\ (x\ ,\ y) = (x-y)^2$ وعليه فإن $F_y = 0$

وبالتالي فإن $y = x$. لاحظ ان $J(y) = 0$ لكل نقطه من نقاط المستقيم $y = x$.

مثال ٢ -١ -٢ :

اذا كان $J[y] = \int_a^b y^2 \, dx$ ، $y(a) = y_0 \;,\; y(b) = y_1$. فإن معادلة اويلر . لاجرانج هي $F_y = 0$ وعليه فإن $y(x) = 0$ ، وبالتالي فإن منحني القيم القصوى يمر بنقط الحدود عندما $y_1 = 0 \;,\; y_0 = 0$ انظر الشكل (٢ -١)



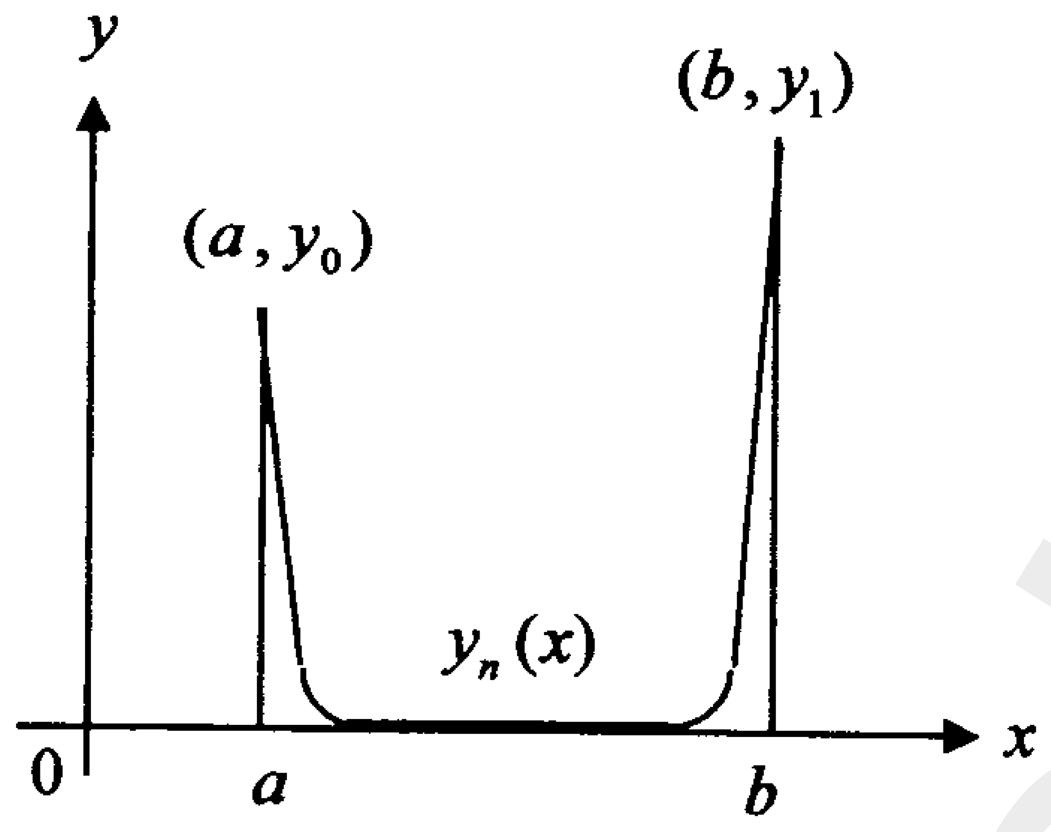
شكل (٢-١)

اذا كان $y_1 = 0$ ، $y_0 = 0$ فان الدالة $y(x) = 0$ تعطي قيمة صغرى للدالي

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2 \; dx$$

$J[y(x)] \geq 0$ و $J(y) = 0$ عندما $y(x) = 0$.

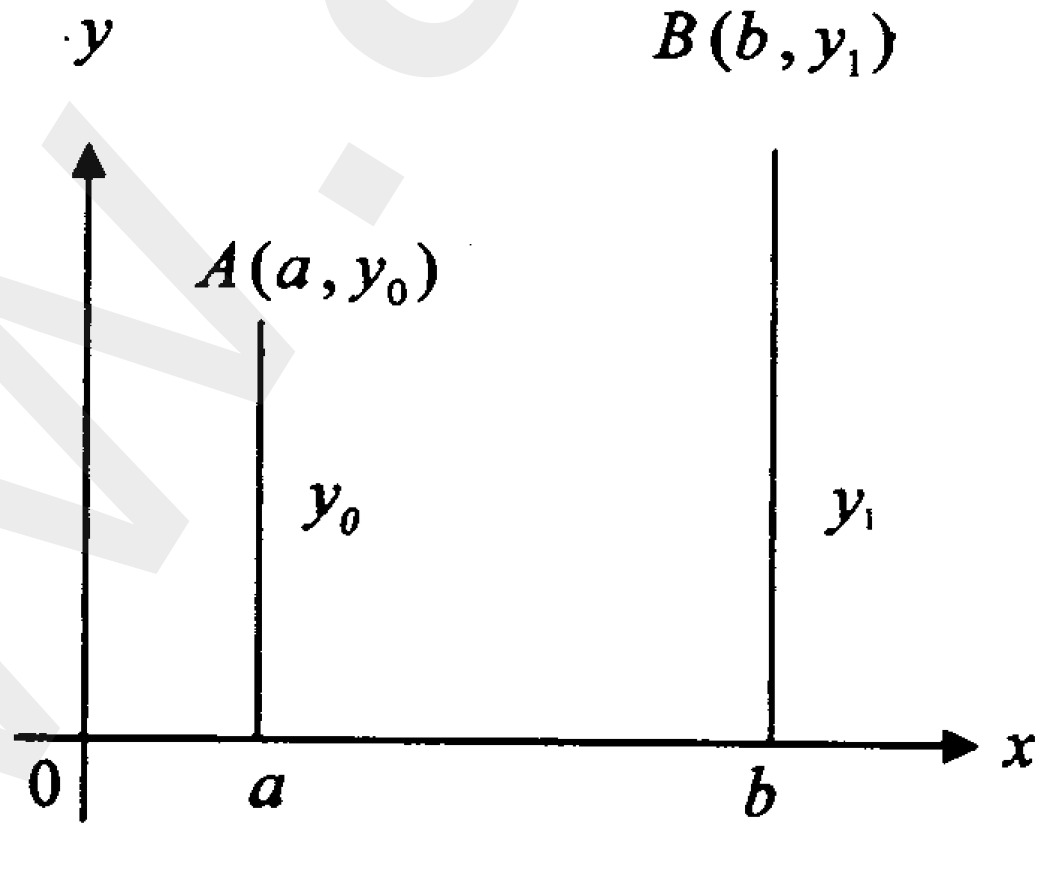
ولكن اذا كان على الأقل احدى النقاط $y_0 \,,\, y_1$ لاتساوي صفر فإن الدالي لايحصل على قيمه الصغرى على دوال متصلة . حيث انه من الممكن اختيار متتابعة من الدوال المتصلة $y_n(x)$ والتي رسمها يتكون من أقواس لمنحنى يبدأ من النقطة (a, y_0) ثم يتجه الى محور x ثم يأخذ جزء من محور x ينطبق تقريبا مع الفترة (a, b) وأخيرا جزء من المنحنى القريب من b ويرتفع الى النقطة (b, y_1) انظر الشكل (٢ -٢) .



شكل (٢-٢)

واضح ان قيم الدالي على المتتابعة $y = y_n(x)$ تكون مختلفة قليلا عن الصفر . ومن ثم فإن أصغر حد لقيم الدالي يكون صفرا ولا يمكن الحصول على هذا الحد على منحنى متصل حيث انه لأى منحنى متصل $y(x) \neq 0$ فإن $\int_a^b y^2\, dx > 0$ ولكن هذا الحد الأصغر لقيم الدالي يمكن الحصول عليه من الدالة غير المتصلة الآتية ، انظر الشكل (٢ -٣)

$$y(a) = y_0 ,$$
$$y(x) = 0 , \qquad a < x < b$$
$$y(b) = y_1 .$$



شكل (٢-٣)

٢ -١ -٢: إذا كانت الدالة F خطيه في y'

وفي هذه الحاله نجد ان

$$F(x, y, y') = M(x,y) + N(x,y)\cdot y'$$

وعليه فإن

$$J[y(x)] = \int_a^b [M(x,y) + N(x,y)\cdot y']\,dx$$

وبالتالي فإن معادلة اويلر $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ تكون على الصوره :

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}\cdot y' - \frac{dN}{dx} = 0$$

لكن

$$\frac{dN}{dx} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\cdot y' ،$$

إذاً

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \qquad \dots (1)$$

وكما سبق فإن هذه المعادله ليست معادله تفاضليه والمنحنى

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

لا يحقق الشروط الحدية وبالتالي فإن .

مسألة التغيرات في هذه الحالة ليس لها حل في مجموعة الدوال المتصلة .

ولكن إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فإن $M\,dx + N\,dy$ معادله تفاضليه تامة ويكون :

$$J[y(x)] = \int_a^b \left(M + N\frac{dy}{dx}\right)dx$$
$$= \int_a^b (M\,dx + N\,dy)$$

لا يعتمد على مسار التكامل وتكون قيمه الدالي ثابته على كل المنحنيات مسموح بها . وبالتالي تكون مسألة التغيرات هنا ليس لها معنى .

مثال ٢ -١ -٣ :

ليكن $J[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right) dx$ ، حيث $y(1) = a \quad , \quad y(0) = 0$

إذاً $F(x, y, y') = M + N \cdot y'$

وعليه فإن معادلة اويلر $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ تأخذ الشكل $y - x = 0$ ونلاحظ ان الشرط الحدي الأول $y(0) = 0$ يتحقق . بينما الشرط الثاني $y(1) = a$ يتحقق فقط إذا كانت $a = 1$. ولكن إذا كانت $a \neq 1$ فإنه لاتوجد منحنيات قصوى تحقق الشروط الحدية .

مثال ٢ -١ -٤ :

ليكن

$$J[y(x)] = \int_a^b \left(y + x y'\right) dx$$

$$= \int_a^b d(x, y) = b y_1 - a y_0$$

حيث $y(b) = y_1 \quad , \quad y(a) = y_0$ إذاً $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 1$

وعليه فإن المكامل $y\,dx + x\,dy$ معادله تفاضلية تامة وبالتالي فإن التكامل لايعتمد على المسار .

$$J[y] = \int_a^b y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_a^b d(x y) = b y_1 - a y_0$$

واضح ان قسمة الدالي تعتمد فقط على نقطة البداية والنهاية و لاتعتمد على مسار التكامل أي المنحنى الذي نكامل عليه ومن ثم فإن مسألة التغيرات هنا تصبح لا معنى لها .

٢-١-٣ إذا كانت الداله F تعتمد فقط على y' :

وفي هذه الحاله تكون اذاً $F = F(y')$ وتكون معادله أويلر على الشكل $F_{y'y'} \cdot y'' = 0$ لأن $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$ ومن ثم فإن $y'' = 0$ أو $F_{y'y'} = 0$.

أولاً : إذا كانت $y'' = 0$ فإن $y = C_1 x + C_2$ تمثل عائلة من المستقيمات ذات ثابتين.

ثانياً : إذا كان للمعادله $F_{y'y'}(y') = 0$ جذر حقيقي أو اكثر $y' = k_i$ فإن $y = k_i x + C$ تمثل عائلة من المستقيمات بثابت واحد وهي محتواه في العائلة السابقة ذات الثابتين. ولهذا اذا كان $F = F(y')$ فإن المنحنيات القصوى للدالي تكون خطوط مستقيمة $y = C_1 x + C_2$.

مثال ٢-١-٥ :

أوجد طول اقصر منحن يصل بين النقطتين $(-1,-2)$ ، $(2,7)$.

الحل

بما أن $J[y(x)] = \int_{-1}^{2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ ، $y(-1) = -2$ ، $y(2) = 7$ ، اذاً $F = \sqrt{1+y'^2}$ ، وعليه فإن معادلة أويلر . لاجرانج هي $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$. ومنها نجد ان $F_{y'} = C$ ، وبالتالي فإن $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ ، وعليه فإن $y' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = m$

إذاً $y = mx + b$. لكن $y(-1) = -2$ ، $y(-1) = -2$ اذاً $m = 3$ ، $b = 1$

وعليه فإن اقصر منحني هو المستقيم $y = 3x + 1$.

٢-١-٤ : اذا كانت $F = F(x, y')$

وفي هذه الحاله نجد ان معادلة اويلر. لاجرانج هي

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x\,,y') = 0$$

وعليــه فــإن $F_{y'}(x\,,y') = C$ وبالتــالي فــإن $y' = f(x,C)$ ، ممــا يــؤدي الى

$y = \int_0^x f(t,c)dt + C_1$ وهي معادله منحني التوقف بالنسبه للدالي $J[y]$.

مثال ٢ -١ -٦ :

ليكن $J[y] = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2y'^2}\,dx$ ، $y(1) = 0$ ، $y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$. اذاً $F = F(x,y')$

وعليه فإن $F_{y'} = C$. لكن $F_{y'} = \frac{x^2y'}{\sqrt{1+x^2y'^2}}$ ، إذاً $\frac{x^2y'}{\sqrt{1+x^2y'^2}} = C$ ،وعليه

فإن $y' = \frac{C}{x\sqrt{x^2-C^2}}$ وبالتالي فإن $y+k = Cos^{-1}\left(\frac{C}{x}\right)$ ، اذاً $x\,Cos\,(y+k) = C$

لكن $y(1) = 0$ ، $y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ ، اذاً $k = \frac{5\pi}{6}$ ، $C = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، وعليه فإن

$x\,Cos\left(y+\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ هي معادله منحني التوقف الذي قد يكون للدالي

$J(y)$ قيم قصوى عليه .

مثال ٢ -١ -٧ :

ليكن $J[y] = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ، $y(1) = 0$ ، $y(2) = 1$ ، اذاً

$F = F(x,y')$ وعليـه فـإن معادلـة اويلـر- لاجـرانج تأخـذ الشـكل $F_{y'} = C$. لكـن

$F_{y'} = \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}$ اذاً $\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C$ وعليـه فإن $y' = \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$

وبالتالي فإن $y = \int \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\,dx = \frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2} + a$ ، اذاً

$(y-a)^2 + x^2 = \frac{1}{C^2}$ وهي عائله دوائر مركزها على محور الصادات ،

لكن $y(1) = 0$ ، $y(2) = 1$ ، اذاً $a = 2$ ، $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، وعليه فإن منحني التوقف هو $(y-2)^2 + x^2 = 5$.

٢ -١ -٥ اذا كانت $F = F(y, y')$

وفي هذه الحاله نجد ان $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_y - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y''$ ، وعليه فإن

$$F_y \cdot y' - F_{yy} \cdot y'^2 - F_{y'y} \cdot y'y'' = \frac{d}{dx}(F - y'F_{y'})$$

وبالتالي فإن $F - y'F_y = C$ ، حيث C ثابت وبحل هذه المعادله بالنسبه الى y' ، واجراء عمليه فصل المتغيرات او بعض التعويضات المناسبه نحصل على المنحني الذي قد يكون للدالي $J[y]$ قيم قصوى عليه .

مثال ٢ -١ -٨ :

اوجد معادله المنحني المار بالنقطتين (a, A) ، (b, B) والذي اذا دار حول محور السينات ولّد سطحاً مساحته اقل ما يمكن .

الحل

بما ان $S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$. اذاً

$F = F(y, y')$ وعليه فإن $F - y'F_y = C$ ، وبالتالي فإن

$y\sqrt{1+y'^2} - y' \cdot \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ وعليه فإن $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ ،

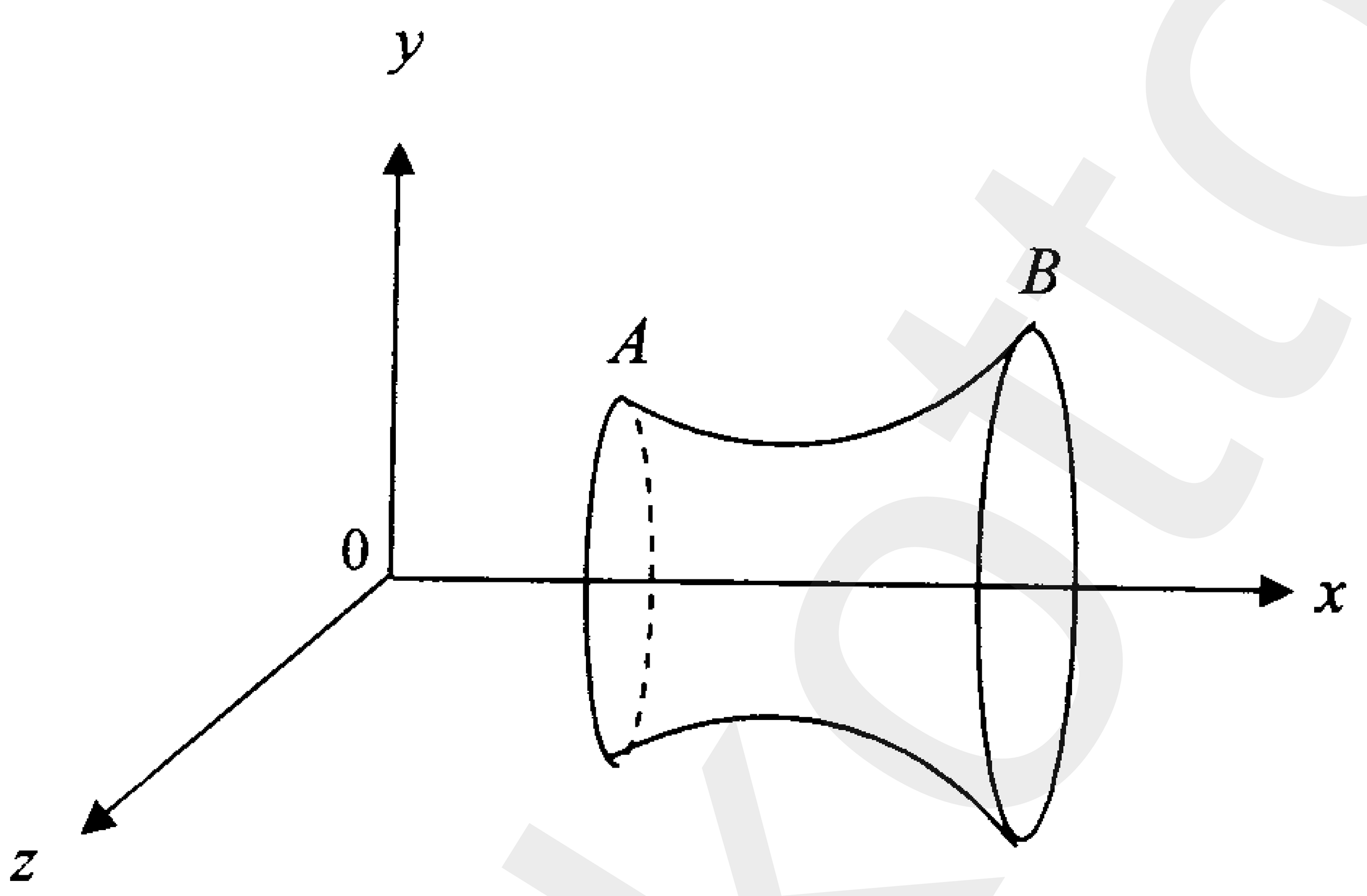
ولحل هذه المعادله نفرض ان

$y' = Sinh\,t$ ، إذاً $y = C\sqrt{1+y'^2} = C\,Cosh\,t$

وحيث ان $y' = \frac{dy}{dx}$ ، اذاً $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C\,Sinh\,t}{Sinh\,t}\,dt = C\,dt$ ، وعليه فإن

$x = Ct + C_1$. اذاً $t = \dfrac{x - C_1}{C}$ ، وبالتــالي فــإن $y = C\,Cosh\left(\dfrac{x - C_1}{C}\right)$

وهذه المعادلة تمثل عائلة من منحنيات السلسلة (الكاتينة) ودورانها يعطي سطوح يسمى كل منها سطح سلسلي الشكل أو كاتينة (*Catenoid*) والثابتان C_1 , C_2 يمكن تعينهما طبقاً للشروط الحدية والتي تعتمد على موضع النقط A ، B. انظر الشكل (٢ -٤)



شكل (٢– ٤)

<u>مثال ٢ -١ -٩</u> : " مسألة منحني أقصر زمن "

وهي مسألة ايجاد منحني الذي اذا انزلق عله جسم كتلته m بدون احتكاك من $A\ (0\ ,\ 0)$ ، $B = (b\ ,\ y_1)$ استغرق اقل زمن ممكن . ولإيجاد ذلك المنحني لاحظ ان عند أي اية لحظه واي نقطه $(x\ ,\ y)$ نجد ان الطاقه الحركيه للجسم تساوي الطاقه الكامنه له ، وهذا يعني ان

$\frac{1}{2}\,mv^2 = m\,g\,y$ وعليه فإن $v = \sqrt{2\,g\,y}$ ، لكن $v = \dfrac{ds}{dt}$ ، $ds = \sqrt{1 + y'^2}$

اذاً $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{2\,g\,y}$ ، وبالتالي فإن $dt = \dfrac{ds}{\sqrt{2\,g\,y}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\,g}} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$ ،

إذاً

$$y(b) = B \text{ ، } y(0)=0 \quad \text{،} \quad t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx$$

وعليه فإن $1+y'^2 = \frac{1}{C\,y}$ ، وهذا يعني ان $y' = \sqrt{\frac{1-Cy}{C\,y}}$ ، ومنها نجد ان

$dx = \sqrt{\frac{Cy}{1-Cy}}\, d\,y$ ، إذاً $dx = \sqrt{\frac{Cy}{1-Cy}}\, d\,y$ والآن افرض ان $1-2C\,y = Cos\,\vartheta$

نجد ان $C\,y = \frac{1-Cos\,\vartheta}{2}$ ، $d\,y = \frac{1}{2C}\, Sin\,\vartheta\, d\vartheta$ وعليه فإن

$$x = \frac{1}{2C}\int\sqrt{\frac{1-Cos\,\vartheta}{1+Cos\,\vartheta}}\cdot Sin\,\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2C}\int\sqrt{\frac{1-Cos\,\vartheta}{1+Cos\,\vartheta}\cdot\frac{1-Cos\,\vartheta}{1-Cos\,\vartheta}}\cdot Sin\,\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2C}\int(1-Cos\,\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{2C}\,(\vartheta - Sin\,\vartheta) + C_2$$

وعليه فإن $x = \frac{1}{2C}\, Cos^{-1}(1-2c\,y) - \sqrt{\frac{y}{C}-y^2} + c_2$ ، لكن $y(0) = 0$

إذاً $C_2 = 0$ وعليه فإن $x = \frac{1}{2C}\, Cos^{-1}(1-2c\,y) - \sqrt{\frac{y}{C}-y^2}$ وهي معادله

(Cycloid) ، لأن $x = \frac{1}{2C}(\vartheta - Sin\,\vartheta)$ ، $y = \frac{1}{2C}(\vartheta - Cos\,\vartheta)$ تمثلان

معادلة (Cycloid) .

٢-٢: داليات عديدة المتغيرات

يقيم هذا الجزء الشروط الضروريه لوجود منحنيات حرجه (توقف) بالنسبة للداليات من الشكل $J[y_1(x),\ldots,y_n(x)]$ اضافةً الى الشكل القانوني لمعادلات اويلر . لاجرانج وبعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية و خاصة قاعدة هاملتون ومعادلات لاجرانج .

٢ -٢ -١ : معادلات اويلر - لاجرانج للداليات المعتمدة على n من المتغيرات .

ليكن

$$J[y_1(x),\ldots,y_n(x)]=\int_a^b F(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')\,dx \text{ ، } y_i(a)=A_i \text{ ، } y_i(b)=B_i \text{ ، }$$

$y_i(x)\in D_1$ ، $\dfrac{\partial F}{\partial y_i}$ ، $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$ دوال متصله على $[a,b]$.

لأيجاد الشروط الضروريه لوجود منحنيات توقف (حرجه) قد يكون للدالي J قيم قصوى عندها ، لاحظ ان

$$\begin{aligned}\delta J[y_1,\ldots,y_n] &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon} J(y_1+\varepsilon\Delta y_1,\ldots,y_n+\varepsilon\Delta y_n,y_1'+\varepsilon\Delta y_1',\ldots,y_n'+\varepsilon\Delta y_n')\Big|_{\varepsilon=0}\\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x,\,y_1+\varepsilon\Delta y_1,\ldots,y_n+\varepsilon\Delta y_n,y_1'+\varepsilon\Delta y_1',\ldots,y_n'+\varepsilon\Delta y_n')\,dx\\
&= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(x,\,y_1+\varepsilon\Delta y_1,\ldots,y_n+\varepsilon\Delta y_n,y_1'+\varepsilon\Delta y_1',\ldots,y_n'+\varepsilon\Delta y_n')\,dx\\
&= \int_a^b \left[\sum\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\cdot\Delta y_i+\frac{\partial F}{\partial y_i'}\cdot\Delta y_i'\right)\right]dx\end{aligned}$$

لكن Δy_i ، $i=1,\ldots,n$ دوال مستقله $\Delta y_i(a)=\Delta y_i(b)=0$ ، اذاً يمكن اختيار أي واحده منها وجعل الباقي صفراً ، وعليه اذا كان $\delta J=0$ ، فإن

$$\int_a^b \left(F_{y_i}\,\Delta y_i + F_{y_i'}\,\Delta y_i'\right)dx = 0$$

لكن $\Delta y_i(x)\in D_1$ ، F_{y_i} ، $F_{y_i'}$ دوال متصله على $[a,b]$ اذاً $\dfrac{d}{dx}(F_{y_i'})=F_{y_i}$ حسب قضيه (١ -١ -٤) . وعليه فإن $F_{y_i}-\dfrac{d}{dx}(F_{y_i'})=0$ ، لكل $i=1,\ldots,n$ ، هي معادلات اويلر - لاجرانج ، وهي الشرط الضروري لوجود منحنيات حرجه للدالي J وهي n من المعادلات التفاضليه من الرتبه الثانيه حلها يعطي عائله من المنحنيات ذات $2n$ من الثوابت في فضاء بعده $(n+1)$ ، قد يكون للدالي J قيم قصوى عليها .

مثال ٢ -٢ -١

اوجد منحنيات التوقف ، التي قد يكون للدالي

$$J[y,z]=\int_0^{\pi/2}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx$$ ، حيث

$J(0)=z(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{2})=1$ ، $z(\frac{\pi}{2})=-1$ ، قيماً قصوى عليها .

الحل

بما ان $F=y'^2+z'^2+2yz$ ، $F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})=0$ ، $F_z-\frac{d}{dx}(F_{z'})=0$

اذاً $y''-z=0$ و $z''-y=0$ وعليه فإن $y^{(4)}-y=0$ وحل هذه المعادلـه التفاضـليه هـو $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

وحيـــث أن $y''=z$ إذاً $z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x$

ولتعيين الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 نستخدم الشروط الحدية فنجد ان $C_1=C_2=C_3=0$, $C_4=1$ ، وعليه فإن منحنيات التوقف للدالي $J(y,z)$ هي

$y(x)=\sin x$, $z(x)=-\sin x$

مثال ٢ -٢ -٢

اوجد منحنيات التوقف للدالي

$$J[y,z]=\int_a^b F(y'+z')\,dx$$

الحل

بما ان معادلتي اويلر. لاجرانج هما

$$F_{y'y'}\cdot y''+F_{y'z'}\cdot z''=0 \qquad \dots(1)$$

$$F_{y'z'}\cdot y''+F_{z'z'}\cdot z''=0 \qquad \dots(2)$$

اذاً بضرب المعادلة (1) في $F_{z'z'}$ والمعادلة (2) في $F_{y'z'}$ ثم الطرح نحصل على

$$\left[F_{y'y'}\,F_{z'z'} - \left(F_{y'z'}\right)^2\right]\cdot y'' = 0$$

ويفرض ان $\left(F_{y'y'}\,F_{z'z'} - \left(F_{y'z'}\right)^2 \neq 0\right.$ ، اذاً $y'' \neq 0$ ، وعليه فإن $y = C_1 x + C_2$. وبالمثل نجد ان $z'' = 0$ ومنه نجد ان $z = C_3 x + C_4$ ، ومن ثم فإن $z(x)$ و $y(x)$ تمثل عائله من الخطوط المستقيمه حيث C_1 , C_2 , C_3 , C_4 ثوابت اختياريه يمكن تعيينها من الشروط الحديه .

وكحاله خاصه من (٢ -٢ -٢) نجد ان "منحني اقصر مسافه بين النقطتين $(0,1,0)$ ، $(1,0,-1)$ في R^3 ، تتحدد بجعل قيمه $J[y(x), z(x)] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2\ z'^2}\,dx$ اقل ما يمكن ، $y(0) = z(0) = 1$ ، $y(1) = 0$ ، $z(1) = -1$ ، اقل ما يمكن ، هما المستقيمان $y = C_1x + C_2$ ، $z = C_3x + C_4$ ، وبإستخدام الشروط الحديه نجد ان $C_1 = -1, C_2 = 1, C_3 = -2, C_4 = 1$ وعليه فإن $y = -x + 1$ ، $z = -2x + 1$.

<u>مثال ٢ -٢ -٣</u>

اوجد منحني التوقف للدالي

$$J[y(x)\,,\,z(x)] = \int_a^b \left(-2y^2 + 2yz - y'^2 + z'^2\right)\,dx$$

حيث $\quad y(b) = b_1\,,\ z(b) = b_2 \ ،\ y(a) = a_1\,,\ z(a) = a_2$

<u>الحل</u>

بما ان معادلات اويلر ـ لاجرانج هي

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \Rightarrow y'' - 2y + z = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0 \Rightarrow y - z'' = 0$$

اذاً $z^{(4)} - 2z^{(2)} + z = 0$ ، وعليه اذا كان $u(x) = z^{(2)} - z$ ، فإن $u^{(2)} - u = 0$ وبالتالي فإن $u(x) = Ae^x + Be^{-x}$. وعليه فإن $z^{(2)} - z = Ae^x + Be^{-x}$. فإذا كان $u(x) = Ae^x + Be^{-x} = 0$ ،

$z^{(2)} - z = 0$ ، فإن $z = Ce^{x} + De^{-x}$ اما إذا كان $u(x) \neq 0$ ، فإن استخدام طريقة تغيير الوسيط (Method of Variation of Parameters) لحل المعادله التفاضليه $z^{(2)} - z = Ae^{x} + Be^{-x}$ يمكننا من اثبات ان

$$z(x) = C(x)e^{x} + D(x)e^{-x}$$
$$= \left(C_0 - \frac{A}{4}\right)e^{x} + \left(D_0 - \frac{B}{4}\right)e^{-x} + \frac{x}{2}\left(Ae^{x} - Be^{-x}\right)$$

وعليه فإن

$$y(x) = \left(C_0 + \frac{3}{4}A\right)e^{x} + \left(D_0 + \frac{3}{4}B\right)e^{-x} + \frac{x}{2}\left(Ae^{x} - Be^{-x}\right)$$

وباستخدام الشروط الحديه يمكننا ايجاد $C_0 \; , \; D_0 \; , \; A \; , \; B$.

٢ -٢ -٢ معادلات اويلر لاجرانج القانونيه

(Canonical Euler – Lagrange Equations)

ليكن

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\, dx \qquad \dots (1)$$

$y_i(a) = A_i$ ، $y_i(b) = B_i$ اذاً نعادلات اويلر ـ لاجرانج هي

$$i = 1, \dots, n \text{ ، } F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0 \qquad \dots (2)$$

وهي مجموعه مكونه من n من المعادلات التفاضليه من الرتبه الثانيه ، حلها يعطي منحنيات التوقف او المنحنيات الحرجه التي قد يكون للدالي J قيم قصوى عليها ولتسهيل حل تلك المعادلات بالتعبير عنها كنظام مكون من $(2n)$ من المعادلات ذات الرتبه الأولى دون التأثير على طبيعة المسائل او المشاكل التي تعالجها ، نفرض ان

$$i = 1, \dots, n \text{ ، } P_i = F_{y_i'} \qquad \dots (3)$$

يطلق على P_i المتغير المرافق للمتغير y_i ، ولنفرض انه يمكن حل المعادله (3)

والتعبير عن y'_i بدلاله $x\ ,\ y_i\ ,\ P_i$ ومن ثم يمكن تعريف داله جديده H ، تسمى داله هاملتون (The Hamiltonian) ترافق (1) حيث

$$H(x, y_1, \ldots, y_n, P_1, P_2, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{n} P_i y'_i - F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)$$

لكن

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(P_i y'_i + y'_i \, dP_i\right) - F_x \, dx - \sum_{i=1}^{n} \left(F_{y_i} dy_i + F_{y'_i} dy'_i\right)$$

$$= - F_x \, dx + \sum_{i=1}^{n} \left(y'_i \, dP_i - F_{y_i} dy_i\right)$$

اذاً

$$-F_{y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad ، \quad y'_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

وعليه فإن

$$i = 1, \ldots, n \quad \text{لكل} \quad ، \quad \frac{-dP_i}{dx} = H_{y_i} \quad ، \quad y'_i = H_{P_i} \quad \ldots (4)$$

وهي نظام كون من $(2n)$ من المعادلات التفاضليه من الرتبه الاولى ، يطلق عليها معادلات اويلر . لاجرانج القانونيه المصاحبه للدالي $J[y_1, \ldots, y_n]$ ، ويحل تلك المعادلات باستخدام الجبر الخطي او غيرها من الطرق نحصل على منحنيات التوقف للدالي J

مثال ٢ -٢ -٤

ليكن $J[y(x)] = \int_a^b \left(y'^2 + y^2\right) dx$ ، اذاً $F = F(y, y') = y'^2 + y^2$ ، وعليه فإن معادله اويلر . لاجرانج هي $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \Rightarrow y'' - y = 0$ وهي معادله تفاضليه من الرتبه الثانيه حلها العام هو $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ ولايجاد معادلات اويلر ــ لاجرانج القانونيه للدالي $J[y]$ نفرض ان $P = F_{y'}$ اذاً $P = 2y'$ وعليه فإن

$$H(x,y,P) = P_{y'} - F(y,y') = \frac{P^2}{4} - y^2$$

وبالتالي فإن $\frac{-dP}{dx} = H_y = -2y$ ، $y' = H_P = \frac{P}{2}$

إذاً معادلات اويلر- لاجرانج القانونيه المصاحبه للدالي $J[y]$ هي

$$P' = 2y \quad ، \quad y' = H_P = \frac{P}{2}$$

وهما معادلتين تفاضليتين من الرتبه الاولى ، ولحل هذا النظام لاحظ ان

$$P' = 2y \Rightarrow P' = 0.P + 1.P'$$
$$(P')' = 2y' \Rightarrow P = 1.P + 0.P'$$

وعليه فإن $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، ولحساب القيم الذاتيه للمصفوف A ، لاحظ ان $\det(A - \lambda I) = 0$ يعني ان $\lambda^2 - 1 = 0$ ، وعليه فإن القيم الذاتيه هي $\lambda = \pm 1$ وعندما $\lambda = 1$ نجد ان المتجه الذاتي المصاحب لها هو $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، اما المتجه الثاني المصاحب للمتجهات الذاتيه $\lambda = -1$ فهو $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

وعليه

$$\begin{pmatrix} P' \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

حل لمعادلات اويلر- لاجرانج القانونيه ، لكن $P' = 2y$ ، اذاً

$$y = \frac{1}{2}C_1 e^x + \frac{1}{2}C_2 e^{-x} = Ae^x + Be^{-x}$$

حل لمعادله اويلر- لاجرانج .

٢ -٢ -٣ قاعده هاملتون (Hamilton's Principle)

يعود مايسمى الميكانيك الكلاسيكي او قوانين الحركه الى كل من ابن سينا ،وهبة الله بن ملكا البغدادي وغاليلو ، ثم طوّر من قبل نيوتن ، هيجنز ، لايبنز ، جيمس برنولي و اويلر معبرين عن الحركه الموجوده في الكون بدلاله متجهات كالقوى والتسارع ، وقد نشرنيوتن القانون الثاني للحركه عام ١٦٨٧م معبراً عنه بالكلمات فقط ، اما التعبير عن ذلك القانون بدلالة الاحداثيات المتعامده فقد ظهر عند جيمس برنولي عام ١٧٤٢م ، وفي عام ١٧٤٤م ، اثبت اويلر امكانية الحصول على قوانين نيوتن من قاعده اقل فعل ممكن (principle of least action) ، وفي عام ١٧٨٨م بين لاجرانج ان قسماً كبيراً مما يسمى الميكانيك الكلاسيكي (قوانين الحركه) يمكن الحصول عليها من تلك القاعده عندما يكون مجال القوى محافظاً ، وفي عام ١٨٣٥م بين هاملتون (١٨٠٥م – ١٨٦٥م) امكانية توسعة قاعدة اقل فعل ممكن – لتشمل مجال القوى المحافظه وغير المحافظه - الى مايسمى الان قاعده هاملتون معتمداً مفهوم الطاقه الحركيه والطاقه الكامنه (طاقه الوضع) ، وما يهمنا في هذا الجزء تعريف القارئ بتلك القاعده وبعض تطبيقاتها .

والآن، إذا كان S نظاماً داينميكياً (ميكانيكياً) منتهياً ، فيقال بأن لذلك النظام n درجه حريه (degree of freedom) ، اذا امكن تحديد اتجاه جسيمات S بـ n من الاحداثيات المستقله $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ، لاحظ انه اذا كان $|S| = 1$ ، فإن $n = 3$ حيث q_1, q_2, q_3 تمثل الأحداثيات المتعامده او الأحداثيات الكرويه . اما اذا كان $|S| = 2$ وكان البعد بين الجسمين وحده واحده ، فإن $n = 5$ حيث q_1, q_2, q_3 تمثل اتجاه او وضع الجسيم الاول ، اما q_4, q_5 فتحدد اتجاه الخط الواصل بين الجسمين .

وحيث انه يمكن وصف النظام الداينامي بدلاله طاقته الحركيه T وطاقته

الكامنه (طاقه الوضع) V اذاً اذا كان النظام محافظاً ، فان طاقته الكامنه لاتعتمد على الزمن وعليه فإن

$$T(q_1,\ldots,q_n,q'_1,\ldots,q'_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \; q'_i \; q'_k$$

حيث
$$q'_i = \frac{dq_i}{dt} \quad , \quad a_{ik} = a_{ki}$$

فإذا كان $L = T - V$ ، والذي يسمى دالة لاجرانج للنظام S ، فإن

$$L = F(t, q_1,\ldots,q_n,q'_1,\ldots,q'_n)$$

ويمكننا ان نثبت ما يلي .

<u>مبرهنه ٢ -٣ -١</u> : (قاعده هاملتون)

يكن وصف حركة نظام ديناميكي مكون من n من الجسمات كتلتها m_i خلال الفتره $[t_0 , t_1]$ بالدوال $q(t) \; , \; q'(t)$ ، $1 < i \leq n$ التي تجعل $H = \int_{t_0}^{t_1} L \; dt$ ، اقل ما يمكن .

أي ان حركه أي نظام ديناميكي من شكل الى آخر تتم بحيث يكون للتكامل $H = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) \; dt$ قيمه توقف على منحني ما من المنحنيات المسموح بها والتي تمر بنفس نقطتي البدايه والنهايه.

<u>البرهان</u>

سنثبت ان قاعده هاملتون تعطي قوانين الحركه . ولإثبات ذلك لاحظ ان

$$H(q_1,\ldots,q_n) = \int_{t_0}^{t_1} L\,(t, q_1,\ldots,q_n,q'_1,\ldots,q'_n) \; dt$$

وعليه فإن معادلات اويلر- لاجرانج للدالي H هي

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) = 0$$

وحيث ان

$$L = T - V$$

اذاً

$$\frac{-\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(m_i\ q_i') = 0$$

مما يؤدي الى ان

$$\frac{-\partial V}{\partial q_i} = m_i\ q_i'' = F_i$$

وهي معادلات نيوتن لنظم مكون من n من الجسيمات .

□

ملاحظه : للتعبير عن قاعده هاملتون بالشكل القانوني ، نفرض ان

$$i = 1,\ldots,n \quad ، \quad P_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

ولنعرف داله هاملتون (The Hamiltonian) كالآتي

$$T(t, q_1,\ldots,q_n, P_1,\ldots,P_n) = \sum_{i=1}^{n} P_i\ q_i' - L$$

وليكن

$$I(q_1,\ldots,q_n, P_1,\ldots,P_n) = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\ q_i' - H\right) dt$$

اذاً $\delta I = 0$ يعني أن معادلات اويلر – لاجرانج القانونية هي $-\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}$

و $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$ ، $i = 1,\cdots,n$ وهي مجموعه مكونه من $(2n)$ من المعادلات التفاضلية تعرف في الميكانيك بمعادلات هاملتون القانونيه .

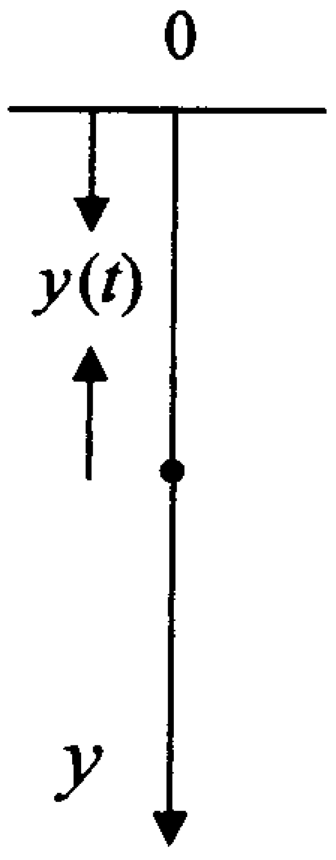
مثال ٢ -٣ -٥ :

اوجد معادلة حركة جسيم كتلته m ساقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية بغرض إهمال مقاومة الهواء.

الحل

نفـرض أن موضـع الجسـيم عنـد أيـة لحظـة t هـو $y(t)$ ، ولنفرض أن نقطة أصل القياس هي نقطة سقوط الجسيم كمـا هـو مـبين في شـكل (٢ -٥) . إذاً $T=\frac{1}{2}\,m\,y'^2$ ، $V=-m\,g\,y$ حيـث g ثابـت الجاذبيـة . وعليـه فـإن $H[y(t)]=\int_0^t[\frac{1}{2}y'^2+g\,y]\,dt$ ، وبالتـالي فـإن معادلـه اويلر ـ لاجـرانج هـي $g-\frac{d}{dt}(y')=0$ ، وعليـه فـإن $y'(t)=gt+c_i$ ومنهـا نجـد أن $y(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_it+c_2$

لكن $y(0)=0$ ، إذاً $y(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_it$.



(شكل ٢ -٥)

مثال٢ -٢ -٦ :

اوجـد باسـتخدام قاعـدة هـاملتون ، معـادلات حركـة جسـيم كتلـة m يتحـرك بالقرب من الأرض تحت تأثير الجاذبية الأرضيه .

الحل

بما أن $T=\frac{1}{2}\,m\,v^2=\frac{1}{2}\,m\,(x'^2+y'^2+z'^2)$ ، $V=mgz$

إذاً
$$L=\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2-gz)$$

وعليه فإن
$$H(x,y,z)=\frac{1}{2}\,m\int_{b_0}^{t_1}(x'^2+y'^2+z'^2-g\,z)\,dt$$

ومنها نجد أن معادلات اويلر – لاجرانج هي

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial x'})=0 \;\Rightarrow\; x''=0 \;\Rightarrow\; x'=c_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial y'})=0 \;\Rightarrow\; y''=0 \;\Rightarrow\; y'=c_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial z'}) = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z'' = -g$$

وهذا يعني بأنه تحت تأثير الجاذبية وبالقرب من سطح الأرض تكون السرعة الأفقيه ثابتة والسرعة العمودية $(-g)$.

<u>مثال ٢ -٢ -٧</u>

اوجد معادلات حركة جسيم (بالأحداثيات القطبيه) في مجال مركزي للقوى .

<u>الحل</u>

نفرض أن كتله الجسيم هي m ، إذاً $ds=\sqrt{(\frac{dr}{dt})^2+r^2.(\frac{d\theta}{dt})^2}$ ، $v=\frac{ds}{dt}$ ، وعليه فإن $v^2=r'^2+r^2\theta'^2$ وبالتالي فإن $T=\frac{1}{2}m(r'^2+r^2\theta'^2)$ لكن $L=T-V$ ، إذاً $L=\frac{1}{2}m(r'^2+r^2\theta'^2)-V(r,\theta)$ ، وعليه فإن $H=\int_{t_0}^{t_1}[\frac{1}{2}m(r'^2+r^2\theta'^2)-V(r,\theta)]dt$

وعليه فإن معادلات اويلر – لاجرانج هي

$$\frac{-\partial v}{\partial r} + mr\theta' - \frac{d}{dt}(mr') = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{-\partial v}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}(mr^2\theta'^2) = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

وبالتالي فإن

$$m(r''=r\theta'^2)=-\frac{\partial v}{\partial r} \quad \cdots \quad (3)$$

$$m(r^2\theta''+2rr'\theta')=\frac{-\partial v}{\partial \theta} \Rightarrow m(r\theta''+2r'\theta')=\frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \cdots \quad (4)$$

لاحظ أن $\frac{-\partial v}{\partial r}$ ، $\frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ تمثلان مركبات القوة $(F=ma)$ المؤثرة على الجسيم باتجاه r واتجاه θ وعليه فإن مركبتي التسارع هما $a_r=r''-r\theta'^2$

والتي تمثل التسارع المركزي $\frac{v^2}{r}$ عندما $v = r\theta$ ، $a_\theta = r\theta''^2 + 2r'\theta'$

والتي تمثل التسارع المركزي (Coriolis acceleration) .

مثال٢ -٢ -٨

اوجد معادلات حركة جسيم كتلة m يتحرك في مجال مركزي للقوى بحيث تكون طاقته الكامنة تعتمد على بعده عن المركز .

الحل

بما أن $T = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2)$ ، $V = V(r)$

إذاً $L = \frac{1}{2}m(r'^2 + r^2\theta'^2) - V(r)$ ،

وعليه فإن معادلات لاجرانج هي

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial r'}\right) = 0 \text{ ،}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right) = 0$$

وبالتالي فإن

$$mr'' - mr\theta'^2 = \frac{-\partial v}{\partial r} \text{ ،} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta') = 0 \Rightarrow r^2\theta' = C \quad \dots \quad (2)$$

وهي قانون كبلر الثاني .

٢ -٣ داليات تعتمد على مشتقات ذات رتب عليا

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة الشروط الضرورية لوجود منحنيات التوقف لنوعين من الداليات المعتمدة على مشتقات ذات رتب عليا .

٢ -٣- ١- إذا كان $J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})dx$ ، حيث $y(x)\in D_n$ ،

$$y(a)=A_0,y'(a)=A_1,\cdots,y^{(n-1)}(a)=A_{n-1} ،$$

$$y(a)=B_0,y'(b)=B_1,\cdots,y^{(n-1)}(b)=B_{n-1}$$

فلتحديد الشروط الضرورية لوجود منحنى توقف قد يكون للدالي $J[y(x)]$ قيم قصوى عليه ، لاحظ أن

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J(y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y',\ldots,y^{(n)}+\varepsilon\Delta y^{(n)})\,|_{\varepsilon=0}$$

$$=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y',\ldots,y^{(n)}+\varepsilon\Delta y^{(n)})dx$$

$$=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\Delta y\,,y'+\varepsilon\Delta y',\ldots,y^{(n)}+\varepsilon\Delta y^{(n)})dx$$

$$=\int_a^b(F_y\,\Delta y+F_{y'}\,\Delta y'+\cdots+F_{y^{(n)}}\,\Delta y^{(n)})dx$$

فإذا كان $\delta J=0$ ، **فإن**

$$\int_a^b(F_y\;\Delta y+F_{y'}\,\Delta y'+\cdots+F_{y^{(n)}}\;\Delta y^{(n)})\;dx=0 \qquad \ldots\;(1)$$

لكن بتكامل الحد الثاني في (1) **بالتجزئة نجد أن**

$$\int_a^b F_{y'}\,\Delta y'\;dx=[F_{y'}\;\Delta y]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}F_{y'}\,\Delta y\;dx$$

لكن $\Delta y(a)=\Delta y(b)=0$

إذاً $\int_a^b F_{y'}\,\Delta y'dx=-\int_a^b\frac{d}{dx}F_{y'}\,\Delta ydx$

وبتكامل الحد الثالث في (1) **بالتجزئة مرتين نجد أن**

$$\int_a^b F_{y''}\,\Delta y''dx=[F_{y''}\,\Delta y']_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}F_{y''}\,\Delta y'dx$$

$$=[F_{y''}\,\Delta y']_a^b-[\frac{d}{dx}F_{y''}\,\Delta y]_a^b=\int_a^b\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\,\Delta dx$$

لكن $\Delta y'(a) = \Delta y'(b) = 0$ ، $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$

إذاً
$$\int_a^b F_{y''} \Delta y'' dx = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \Delta y dx$$

ويتكامل الحد الرابع في (1) بالتجزئة ثلاثة مرات والحد الخامس أربعة مرات ، ... ، والحد النوني $(n-1)$ من المرات وتطبيق الشروط الحدية نجد أن (1) تصبح كالآتي

$$\int_a^b [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}] \Delta y \ dx = 0$$

وبتطبيق قضيه (١ -١ -١) ، نجد ان

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

وعليه فأن الداله $y(x)$ التي قد يكون للدالي $J[y]$ قيم قصوى عليها يجب ان تكون حلاً للمعادله التفاضليه الآتيه

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

وهـذه المعادلـه التفاضـليه ذات الرتبـه $2n$ تسـمى بمعادلـة اويلـر .بواسـون (Euler-Boisson) وحلها العام يحتوي على $2n$ من الثوابت الاختياريه يمكن تعينها باستخدام $2n$ من الشروط الحديه الموجوده في بدايه المسأله .

مثال ٢ -٣ -١ :

اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(1 + y''^2\right) dx$$

بحيث ان $y'(1) = 1$ ، $y(1) = 1$ ، $y'(0) = 1$ ، $y(0) = 0$.

الحل

من الواضح ان معادلة اويلر – بواسون هي :

$$y^{(4)} = 0 \text{ و عليه فان } \quad ، \quad \frac{d^2}{dx^2}(2y'')\, dx = 0$$

اذاً $y(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ ، وبإستخدام الشروط الحديه نجد ان

$c_3 = 1$ ، $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ وبالتالي فان $y(x) = x$

مثال ٢ -٣ -٢

اوجد منحنيات التوقف للدالي

$$[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(y''^2 - y^2 + x^2 \right) dx$$ ، حيث

$$y(0) = 1 \text{ ، } y'(0) = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ ، } y'(\frac{\pi}{2}) = -1$$

الحل

معادلة اويلر- بواسون هي

$$y^{(IV)} - y = 0$$

وحلها العام هو

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 Cosx + C_4 Sinx$$

وبأستخدام الشروط الحديه لتعيين الثوابت نجد ان

$$C_3 = 1 \text{ ، } C_1 = C_2 = C_4 = 0$$

ومن ثم فإن القيم القصوى للدالي نحصل عليها على المنحنى الذي معادلته

$$y = Cosx$$

مثال ٢ -٣ -٣ :

اوجد منحنيات التوقف للدالي

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi} \left(16y^2 - y''^2 + x^2 \right) dx$$

حيث $y(0)=y(\pi)=0$ ، $y'(0)=y'(\pi)=1$

الحل

معادلة اويلر ـ بواسون - بالنسبة الى هذا الدالي - هي

$$32y+(-1)^2\frac{d^2}{dx^2}(-y'')=0 \quad \text{او} \quad y^{(4)}-16y=0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$y = C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3Cos\,2x+C_4Sin\,2x$$

وبإستخدام الشروط الحدية لتعيين الثوابت نحصل على

$$C_1=C_2=C_3=0 \text{ ، } C_4=\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن $y(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

<u>٢ -٣ -٢ : إذا كان الدالي على الصورة</u>

$$y(x),z(x)\in D_n \text{ ، } J[y(x),z(x)]=\int_a^b F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)},z,z',\ldots,z^{(m)}\right)dx$$

فإننا نجعل $y(x)$ **دالة متغيرة ونفرض أن** $z(x)$ **ثابتة وبالتالي نحصل على :**

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0 \qquad \ldots (2)$$

وبالمثل نجعل $z(x)$ **دالة متغيرة بينما** $y(x)$ **ثابتة لنحصل على :**

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{z''}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0 \qquad \ldots (3)$$

ومن ثم فإن الدالتين $z(x)$ ، $y(x)$ **يحققان نظام من معادلتين هما** (3) ، (2) .

ومن هنا فإنه يمكننا دراسة دالي يعتمد على أي عدد من الدوال ، فإذا كان

$$J[y_1(x),y_2(x),\ldots,y_m(x)]=\int_a^b F(x,y_1,y_1',y_1'',\ldots,y_1^{(n_1)},y_2,y_2',\ldots,y_2^{(n_2)},\ldots,y_m,y_m',\ldots,y_m^{(n_m)})dx$$

حيث $y_i(x)\in D_n$ **لكل** $i=1,\ldots,m$.

وكانت إحدى هذه الدوال متغيرة ولتكن $y_i(x)$ **فرضنا ان الدوال الأخرى ثابتة .**

فإننا نحصل على الشرط الضروري لوجود القيم القصوى للدالي في الشكل الآتي

$$i=1,2,3,\ldots,m \quad , \quad F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y_i''}+\ldots+(-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0$$

<u>مثال ٢ -٣ -٤</u> :

اوجد منحنيات التوقف للدالي

$$J[y,z]=\int_a^b\left(y''^2+y^1-y^2+z'^2+z''^2\right)\,dx$$

<u>الحل</u>

بما ان معادلتي اويلر ـ بواسون هما

$$z^{(2)}+z^{(4)}=0 \;،\; y^{(4)}-y=0$$

اذاً

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+A\,Cos\,x+B\,Sin\,x$$

$$z(x)=b_1+b_2x+b_3Cos\,x+b_4Sin\,x$$

<u>٢ -٤</u>: داليات بشروط اضافيه (Functional with subsidiary conditions)

قد تتطلب بعض المسائل جعل تكامل ما نهايه قصوى ، والاحتفاظ بتكامل او شروط اضافيه على نفس المتغيرات ثابت ، وهذا ما نرغب بدراسته في هذا الجزء فاذا كان

$$K[y]=\int_a^b G(x,y,y')=L \quad و \quad y(x)=A\,,y(b)=B \;،\; J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

حيث L ثابت ، وكانت $y=y(x)$ قيمه قصوى للدالي $J[y]$ بينما $y(x)$ ليست قيمه قصوى للدالي $K[y]$ ، فيوجد ثابت λ بحيث ان $y(x)$ قيمه قصوى للدالي $S[y]=\int_a^b(F+\lambda G)\,dx$ ، وتسمى λ مضاعف لاجرانج (Lagrange's multiplleir) ، وهذا يعني ان $y(x)$ تحقق معادله اويلر ـ لاجرانج الآتيه

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda\left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right) = 0$$

مثال ٢ -٤ -١

من بين جميع المنحنيات الواقعه في الربع الأول ، والتي طول كل منها L ، وتمر بالنقطتين $(-a,0)$ ، $(a,0)$ ، اوجد ذلك المنحنى الذي يكون مع الفتره $[-a,a]$ اكبر مساحه ممكنه .

الحل

لإيجاد المنحنى $y(x)$ الذي يجعل للدالي $J[y] = \int_a^b y\ dx$ ، اكبر قيمه ممكنه ، بشرط ان $y(-a) = y(a) = 0$ ، $K[y] = \int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\ dx = L$ ، لاحظ ان معادله اويلر ـ لاجرانج للدالي

$$S[y] = J[y] + \lambda K[y] = \int_{-a}^{a}\left(y + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx$$

هي

$$1 + \lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

وعليه فإن $x + \lambda\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c$ **، ومنها نجد ان** $(x-b)^2 + (y-c)^2 = \lambda^2$ ،

والتي تمثل عائلة دوائر مركزها (b, c) ونصف قطرها λ ، ويمكن تحديد قيم b ، c من الشروط $y(-a) = y(a) = 0$ ، $K[y] = L$ ، فمن الشرط $y(-a) = y(a) = 0$ نجد ان

$$a^2 + c^2 = \lambda^2 \ ، \ b = 0$$

لكن $$y' = \frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \ ، \ K[y] = L$$

اذاً

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\ dx = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}\ dx$$

$$= 2\lambda \int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = 2\lambda\, Sin^{-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right)$$

وعليه فأن

$$\frac{L}{2\lambda} = Sin^{-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right) \Rightarrow a = \lambda\ Sin\left(\frac{L}{2\lambda}\right)$$

وبالتالي فان $C = \lambda \sqrt{1 - Sin\left(\frac{L}{2\lambda}\right)}$ ، وعليه فان معادلة المنحنى هي

$$x^2 + \left(y - \lambda \sqrt{1 - Sin\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \right)^2 = \lambda^2$$

مثال ٢ -٤ -٢

اوجد منحنى التوقف (المنحنى الحرج) للدالي $J[y] = \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\ dx$ ،

حيث $y(-a) = y(a) = b$ ، $K[y] = \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\ dx = 2L$

الحل

بما ان $S[y] = J[y] + \lambda K[y]$ ، اذاً $S[y] = \int_{-a}^{a} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\ dx$ ، وعليه فان

معادلة اويلر- لاجرانج هي

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0$$

وبالتالي فإن

$$\frac{d}{dx}\left[(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0$$

وعليه فإن $\frac{d}{dx}\left[\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0$ ، اذاً

$\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}} = c$ ، وعليه فإن

$y' = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}{c}$ ، ومنها نجد ان

$Cosh^{-1}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = \frac{x}{c} + e$ ، وعليه فان $y+\lambda = c\ Cosh\left(\frac{x}{c} + e\right)$. وحيث ان

المنحنى متناظر حول محور الصادات ، اذاً $e = 0$ وعليه فإن $y+\lambda = c\ Cosh\left(\frac{x}{c}\right)$.

لكن $y(a) = b$ اذاً $\lambda = c\ Cosh\left(\frac{a}{c}\right) - b$.

وحيث ان

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\ dx = 2L \Rightarrow \int_{-a}^{a}\sqrt{1+Sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)}\ dx = 2L$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{a} Cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx = L \Rightarrow Sinh\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{L}{c}$$

اذاً $Cosh\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{\sqrt{L^2+c^2}}{c}$ ، وعليه فإن

$\lambda = \sqrt{L^2+c^2} - b$ ، وبالتالي فإن

$y = c\ Cosh\left(\frac{x}{c}\right) + b - \sqrt{L^2+c^2}$.

<u>ملاحظه</u> اذا كان

$J[y_1,\ldots,y_n] = \int_a^b F[x, y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_n]\,dx$ ، $y_i(a) = A_i$ ، $y_i(b) = B_i$ لكل

$i = 1,\ldots,n$ ، وكان

$$K_j[y_1,\ldots,y_n] = \int_a^b G_j(x, y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_2)\ dx = L_j \text{ ، } i = 1,\ldots,m$$

فان معادلة اويلر- لاجرانج للدالي

$$S[y_1,\dots,y_n] = J[y_1,\dots,y_n] + \lambda_j K_j[y_1,\dots,y_n]$$

هي

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G_j\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y_i'}\left(F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G_j\right)\right] = 0$$

مثال ٢ -٤ -٣ :

اوجد منحنى التوقف للدالي

$$y(0) = y(1) = 0 \ ، \ J[y] = \int_0^1 y'^2 \, dx$$

$$K_2[y] = \int_0^1 x\, y\, dx = 1 \ ، \ K_1[y] = \int_0^1 y\, dx = 0$$

الحل

بما ان $S[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 x y\right) dx$

اذاً معادلة اويلر- لاجرانج هي

$$2y'' - \lambda_1 - \lambda_2 x = 0$$

وعليه فان $y'' = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 x$ ، **وبالتالي فان** $y' = \frac{1}{2}\lambda_1 x + \frac{1}{4}\lambda_2 x^2 + c_1$ ،

وعليه فان

$$y = \frac{1}{4}\lambda_1 x^2 + \frac{1}{12}\lambda_2 x^3 + c_1 x + c_2$$

لكن $y(0) = y(1) = 0$ **اذاً** $c_2 = 0$ ،

$$3\lambda_1 + \lambda_2 + 12c_1 = 0 \qquad \dots (1)$$

لكن $\int_0^1 x\, y\, dx = 1 \ ، \ \int_0^1 y\, dx = 0$

اذاً $4\lambda_1 + \lambda_2 + 24c_1 = 0 \qquad \dots (2)$ ،

$$15\lambda_1 + 4\lambda_2 + 80c_1 = 0 \qquad \dots (3)$$

ومن (1) ، (2) ، (3) نجد ان

$$c_1 = 60 \text{ ، } \lambda_2 = -1440 \text{ ، } \lambda_1 = 720$$

وعليه فان $y = 60 + 180x^2 - 120x^3$.

ملاحظه: اذا كان $J[y,z] = \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ ، $G(x,y,z) = 0$ ، $y(a) = A_1$ ، $y(b) = B_1$ ، $z(a) = A_2$ ، $z(b) = B_2$ ، وكان للدالي $J[y]$ قيمه قصوى على المنحنى $y = y(x)$ ، $z = z(x)$ ، وليس كل من G_x ، G_y يساوي صفر عند أي نقطه من نقاط السطح $G(x,y,z)$ ، فتوجد داله $\lambda(x)$ بحيث ان $z(x)$ ، $y(x)$ قيم قصوى للدالي :

$$S[y,z] = \int_a^b [F + \lambda(x)G] \ dx$$

وبالتالي فإن معادلتي اويلر ـ لاجرانج هما :

$$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_z + \lambda G_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

مثال ٢ -٤ -٤ :

اوجد المنحنيات الحرجه للدالي

$J[y,z] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \ dx$ ، $y^2 + z^2 = 1$ ، $y(0) = z(1) = 1$ ، $y(1) = z(0) = 0$.

الحل

بما ان $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ ، $G = y^2 + z^2 - 1 = 0$ ، اذاً معادلتي اويلر ـ لاجرانج هما

$$F_z + \lambda G_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \ ، \ F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

وعليه فإن

$$2\lambda y - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0 \qquad \dots (1)$$

$$2\lambda z - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0 \qquad \dots (2)$$

وحيث ان $y^2 + z^2 = 1$ ، اذاً اذا كانت $y = Cos\,\vartheta$ ، $z = Sin\,\vartheta$ ، فإن $y''^2 + z'^2 = \vartheta'^2$ وبالتعويض في (1) ، (2) ينتج ان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-\vartheta' \ Sin\,\vartheta}{\sqrt{1 + \vartheta'^2}}\right) - 2\lambda Cos\,\vartheta = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta' \ Cos\,\vartheta}{\sqrt{1 + \vartheta'^2}}\right) - 2\lambda Sin\,\vartheta = 0$$

وعليه فإن

$$Sin\theta \cdot \frac{d}{dx}[\frac{\theta' Sin\theta}{\sqrt{1+\theta'^2}}] + Cos\theta \cdot \frac{d}{dx}[\frac{\theta' Cos\theta}{\sqrt{1+\theta'^2}}] = 0$$

وبالتكامل بالتجزئة نجد أن $\frac{d}{dx}(\frac{\theta'}{\sqrt{1+\theta'^2}}) = 0$ ، وعليه فإن $\theta' = c$ ،

وبالتالي فإن $\theta = cx + b$ حيث c, b ثوابت

إذاً

$$Sin^{-1}(z) = cx + b \ ، \ Cos^{-1}(y) = cx + b$$

وعليه فإن

$$z = Sin(cx + b) \ ، \ y = Cos(cx + b)$$

لكن $y(0) = z(1) = 1$ ، $y(1) = z(0) = 0$ ، إذاً $b = 0$ ، $c = \frac{\pi}{2}$ ، وعليه فإن منحنى التوقف هو

$$z = Sin(\frac{\pi x}{2}) \ ، \ y = Cos(\frac{\pi x}{2})$$

مثال ٢ -٤ -٥

اوجد منحنيات التوقف للدالي :

$J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx$ حيث $y(0)=2$ ، $y(1)=e$ ، $z(0)=1$ ، $z(1)=2e$ ،

$G(x,y,z,y',z')=y'-z$

الحل

بمـا أن $F=y'^2+z'^2$ ، $G=y'-z$ ، إذاً $F+\lambda G=y'^2+z'^2+\lambda(y'-z)$

، وعليه فإن معادلتي اويلر – لاجرانج هما

$2y''+\lambda'=0$ (1) ، $2z''+\lambda=0$ (2)

ومن (1) ، (2) ينتج أن $y^{(4)}-y^{(2)}=0$

وعليه فإن $y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$ ، لكن $z=y'$

إذاً $z=c_2+c_3e^x-c_4e^{-x}$

ومن الشروط الابتدائيه يمكن إيجاد c_1,c_2,c_3,c_4

تمارين

١) اوجد حل معادلة اولير – لاجرانج لكل مما يأتي

(ا) $J[y]=\int_a^b \sqrt{x(1+y'^2)}\,dx$ ، (ب) $J[y]=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$

(ج) $J[y]=\int_a^b x\sqrt{1-y'^2}\,dx$ ، (د) $J[y]=\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\,dx$

(هـ) $J[y]=\int_a^b (y'+x^2y'^2)dx$ ، (و) $J[y]=\int_a^b (xy'+y'^2)dx$

$J[y]=\int_a^b y\sqrt{y^2+y'^2}\,dx$ (ح) ، $J[y]=\int_a^b \sqrt{1+y^2y'^2}\,dx$ (ز)

$J[y]=\int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2}$ (ي) ، $J[y]=\int_a^b \frac{yy'^2\,dx}{1+yy'}$ (ط)

$J[y]=\int_a^b (y^2+2xyy')\,dx$ (ل) ، $J[y]=\int_a^b e^x\sqrt{1+y'^2}\,dx$ (ك)

$J[y]=\int_a^b (y^2+y'^2-2y\sin x)\,dx$ (ن) ، $J[y]=\int_a^b y'(1+x^2y')\,dx$ (م)

$J[y]=\int_a^b (y'^2+2yy'-16y^2)\,dx$ (ع) ، $J[y]=\int_a^b x^{-3}y'^2\,dx$ (س)

٢) إذا كـــان $J[y]=\int_a^b F[x,y,y']dx$ ، $y(a)=A$ ، $y(b)=B$ ، فاثبـــت انـــه يمكـــن التعبير عن معادلة اولير — لاجرانج كالآتي

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})-F_x=0$$

٣) حـــدد شـكل مســار شــعاع ضــوئي يمــر بوســط معامــل انكســار الضــوء فيــه بالإحداثيات القطبية يتناسب مع $\frac{1}{r^2}$.

٤) اوجد منحنيات التوقف (المنحنيات الحرجه) التي يمكن أن يكون للدالي قيمة قصوى عليها عندما :

$y(2)=2$ ، $y(1)=1$ ، $J[y]=\int_1^2 x^2y'\ dx$ (ا)

$y(1)=2$ ، $y(0)=1$ ، $J[y]=\int_0^1 (xy+y^2-y^2y')\,dx$ (ب)

$y(1)=2$ ، $y(0)=1$ ، $J[y]=\int_0^1 (y^2-yy'+y'^2)\,dx$ (ج)

(د) $J[y]=\int_0^1 y'^2 dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$

(هـ) $J[y]=\int_{-1}^1 \sqrt{y(1+y'^2)}\, dx$ ، $y(-1)=y(1)=2$

(و) $J[y]=\int_0^1 y' dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$

(ز) $J[y]=\int_0^1 yy' dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$

٥) إذا كان $J[y]=\int_a^b f(y)\sqrt{1+y'^2}\, dx$ ، فاثبت أن $x=b+c\int \frac{dy}{\sqrt{(f(y))^2 c^2}}$ ،

ثم حدد شكل منحنى التوقف عندما :

(ا) $f(y)=y$ ، (ب) $f(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$

(ج) $f(y)=\frac{1}{y}$ ، $y(0)=1$ ، $y(2)=3$

(د) $f(y)=\frac{1}{y^2}$.

(٦) اوجد حل معادلتي اويلر لاجرانج في كل مما ياتي

(ا) $J[y,z]=\int_a^b (y'^2+z'^2+y'z')dx$

(ب) $J[y,x]=\int_a^b (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx$

(٧) إن مسألة إيجاد اقل زمن يستغرقه جسيم متحرك من (x_0,y_0,z_0) إلى (x_1,y_1,z_1) الواقعتين على منحنى في R^2 ، يحددها إيجاد القيمة الصغرى للدالي $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{y}}\, dx$. اوجد حل معادلتي اويلر – لاجرانج

لذلك الدالي .

(٨) اوجد ان $y(x)$ ، $z(x)$ بحيث ان للدالي $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2-2gz)dx$ ،
قيمة صغرى حيث g ثابت ، $y(0)=z(0)=0$ ، $y(1)=a$ ، $z(1)=0$.

(٩) اوجد معادلتي المنحنى $y(x)$ ، $z(x)$ ، إذا كان للدالي $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx$
قيمة صغرى عندما :

(أ) $y(0)=z(0)=0$ ، $\dot{y}(1)=0$ ، $z(1)=2$

(ب) $y(0)=y(1)=0$ ، $z(0)=0$ ، $z(1)=2$

(١٠) باستخدام معادلات اويلر- لاجرانج القانونيه ، اوجد منحنيات التوقف لكل مما يأتي :

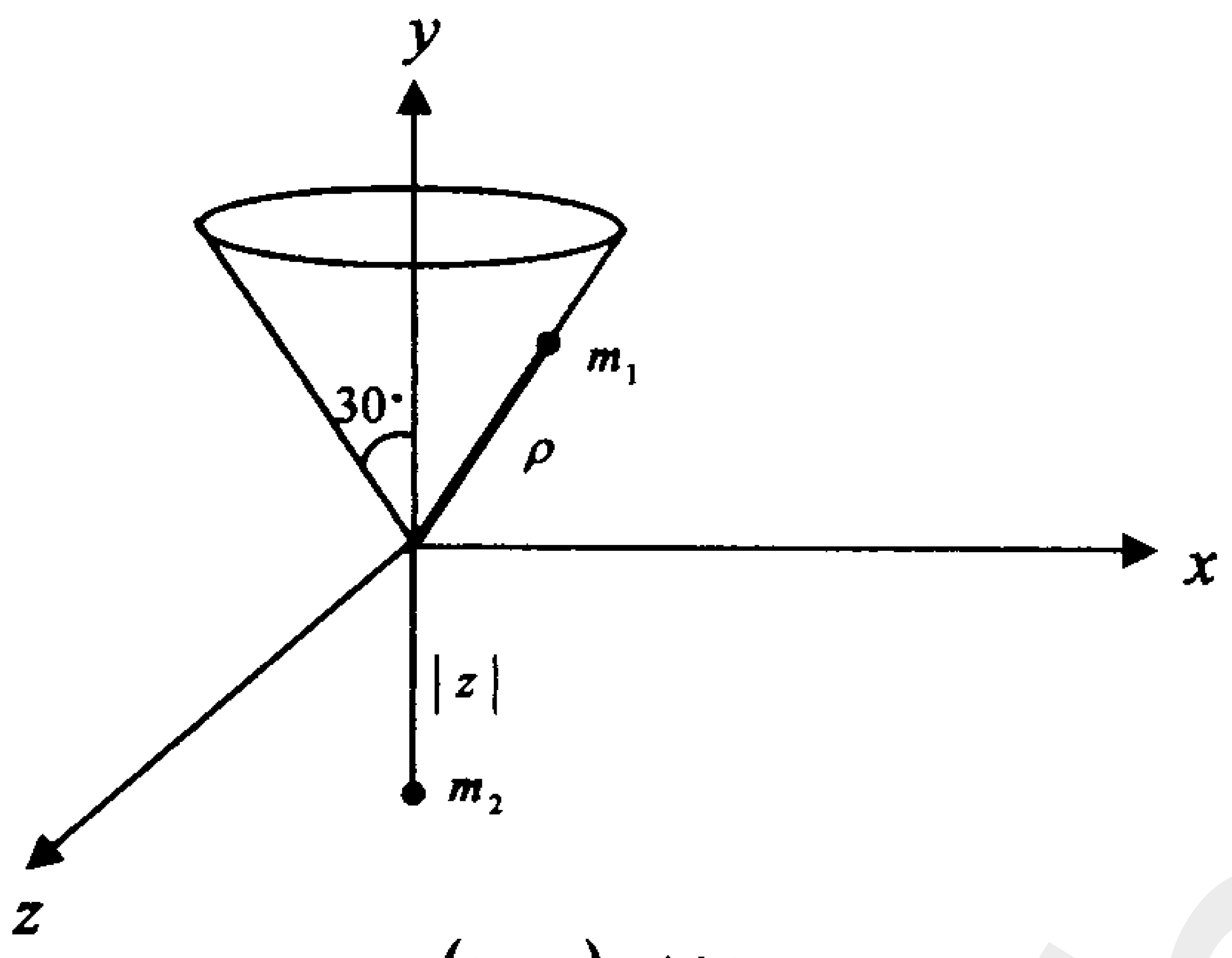
(أ) $J[y]=\int\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}\,dx$

(ب) $J[x]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(mx'^2-\alpha x^2)dt$

(١١) اوجد معادلة حركة جسم يتحرك على محور السينات ، إذا كانت طاقته الكامنة (طاقة الوضع) $v=\frac{1}{2}kx^2$.

(١٢) يتحرك جسيم كتلة m_1 غم بدون احتكاك على سطح مخروط دائري قائم كما في الشكل (٣ -١) ، ويتحرك جسيم آخر كتلته m_2 غم مربوط

بخيط ثابت الطول إلى الأعلى والأسفل . اوجد معادلات لاجرانج لحركة تلك المجموعة من الجسيمات .



شكل (٣–١)

(١٣) اوجد منحنيات القيم القصوى (المنحنيات الحرجة) في كل مما يأتي :

(ا) $J[y]=\int_a^b [2xy+(y^{(3)})^2]dx$

(ب) $J[y]=\int_a^b (x^2+16y^2-y''^2)dx$

(ج) $J[y]=\int [y^2-2x^3y+(y^{(3)})^2]dx$

(د) $J[y]=\int_a^b (y''^2-2y'^2+y^2-2y\sin)dx$

(هـ) $J[y]=\int_a^b (y''^2+y'^2+y^2)dx$

(و) $J[y]=\int_0^1 (1+y''^2)dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$ ، $y'0)=y'(1)=1$.

(ز) $J[y]=\int_a^a (\frac{1}{2}\alpha y''^2+\beta y)dx$ ، حيث $x_1\beta$ ثوابت، $y(-a)=y(a)=y'(-a)=y'(a)=0$

(ح) $J[y]=\int_0^{\pi/2}(y''^2-y^2+x^2)dx$ ، $y(0)=1$ ، $y(\frac{\pi}{2})=0$ ، $y'(0)=0$ ،

$y'(0)=0$ ، $y'(\pi 20)=1$

(١٤) اوجد معادلة المنحنى المار بالنقطتين (0,0) ، (1,0) ، الذي يجعل للدالي $J[y]=\int_0^1 y''^2dx$ قيمة صغرى عندما $y'(0)=a$ ، $y'(1)=a$.

(١٥) اوجد المنحنيات الحرجة (منحنيات التوقف) لكل مما يأتي

(ا) $J[y]=\int_0^1(x^2+y'^2)dx$ ، بشرط أن $K[y]=\int_0^1 y^2dx=2$ ، $y(0)=y(1)=0$

(ب) $J[y]=\int_a^b y'^2dx$ و $K[y]=\int_a^b ydx=L$

(ج) $J[y]=\int_0^1 y'^2dx$ بشرط أن $K[y]=\int_0^1 ydx=\frac{1}{3}$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$.

(د) $J[y]=\int_0^1 y'^2dx$ بشرط أن $y(0)=0$ ، $y(1)=1$ ، $K[y]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=2$

(هـ) $J[y]=\int_{t_0}^{t_1}xy'dt$ و $K[y]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=L$

(و) $J[y]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy'-yx')dt$ و $K[y]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=L$

(ز) $J[y,z]=\int_0^1(y'^2+z'^2-yxz'-yz)dx$ بشرط أن $\int_0^1(y'^2-xy'-z'^2)dx=2$ ،

$y(0)=z(0)=0$ ، $y(1)=z(1)=1$

(ح) $J[y,z]=\int_0^1(y^2+y'+z'^2)dx$ و $y'-z=0$.

(ط) $J[y,z]=\int_0^1(y^2+y'^2+z'^2)dx$ و $y'+z'-y=0$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$ ،

$z(0)=0$ ، $z(1)=0$

الفصل الثالث

مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعدده والمسأله العكسيه

قد تكون بعض الداليات ذات تكاملات متعدده (مضاعفه)، وتملك قيماً قصوى على منحنيات معينه، ولمعرفة الشروط الضروريه لوجود منحنيات توقف (حرجه) يكون للدالي قيمه قصوى عندها، نتناول في هذا الفصل دراسة تلك الداليات وتحديد معادلات اويلر ـ لاجرانج بالنسبه لها ودراسه بعض التطبيقات المهمه هندسيه وفيزيائيه، اما في البند الثاني من هذا الفصل، فقد تناولنا المسأله العكسيه وهي ايجاد الدوال $F(x,y,y')$ التي يكون المنحني $y(x)$ حلاً لمعادله اويلر ـ لاجرانج الناتجه منها .

٣ ـ١ : مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعدده وبعض تطبيقاتها

يضم هذا الجزء دراسة قيم التوقف "المنحنيات الحرجه" للداليات ذات التكاملات المضاعفه او المتعدده (multiple integrals)، واعطاء بعض التطبيقات المهمه كإيجاد معادله الحركه لسلك متذبذب (مهتز) من الجهتين، واشتقاق معادلتي لابلاس وشرو دنجر، اضافه الى بعض التطبيقات الهندسيه، فإذا كان :

$$J[z(x,y)] = \iint_R F(x,y,z,z_x,z_y)\ dx\, dy \in \ell_2$$

حيث ℓ_2 مجموعه الدوال التي تكون مشتقاتها الجزئيه الأولى والثانيه متصله (مستمره) على المنطقه المغلقه R ، كما ان للداله $z(x,y)$ قيم معرفه ومحدده على ∂R ، حيث ∂R هي حدود R ولتحديد شروط قيم التوقف (المنحنيات الحرجه)، نورد مايلي :

قضيه مساعده (٣ -١ -١)

اذا كانـت $f\ (x,y)$ دالـه متصـله علـى المنطقـه المغلقـه R ، وكـان $\iint_R F(x,y)\, h(x,y)\, dx\, dy = 0$ لكـل $h\ (x,y) \in \ell_2$ ، كمـا ان $h\ (x,y) = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$ ، فإن $f\ (x,y) = 0$ لكل $(x,y) \in R$.

البرهان :

نفرض وجود $R \ni (x^*, y^*)$ بحيث ان $f\ (x^*, y^*) \neq 0$. اما $f > 0$ او $f < 0$ ، فاذا كانت $f\ (x^*, y^*) > 0$ ، فان اتصال f على R يعني ان $f\ (x,y) > 0$ لكل

$$(x,y) \in B = \{(x,y) \in R |\ (x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 \le r^2\} \subseteq R \text{ ،}$$

وعليه فإذا كانت h^* داله معرفه على R كالآتي

$$h^*(x-y) = \begin{cases} 0 & ,\forall (x,y) \in R-B \\ (r^2 - [(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2])^3 & ,\forall (x,y) \in B \end{cases}$$

فـإن $h^* \in \ell_2$ كمـا ان $\iint_R F(x,y)\, h(x,y)\, dx\, dy = 0$ ، وهـذا غـير ممكـن لأن $f(x,y)\, h^*(x,y) > 0$ لكـل $(x,y) \in B$ ، وعليـه فـإن $f\ (x^*, y^*)$ لايمكـن ان تكون اكبر من الصفر . وبنفس الطريقه يمكن ان نثبت ان $f\ (x^*, y^*)$ لا يمكن ان تكون اصغر من الصفر ، وعليه فإن $f\ (x,y) = 0$ لكل $(x,y) \in R$.

□

والآن الى المبرهنه الآتيه التي تحدد شروط وجود قيم التوقف .

مبرهنه ٣ -١ -٣:

اذاكانت $Z\,(x,y)$ معرفه ومحدده على ∂R ، وكان للدالي

$$J[z\ (x,y)] = \iint_R F(x,y,z,z_x,z_y)\ dx\ dy \in \ell_2$$

قيمه قصوى على المنحني $Z(x,y)$ فإن F تحقق معادله اويلر- لاجرانج ، أي ان

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

البرهان

بما ان

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(Z + \varepsilon \Delta Z) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \iint_R \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y, Z+\varepsilon \Delta Z, Z_x + \varepsilon \Delta Z_x, Z_y + \varepsilon \Delta Z_y)\ dx\ dy$$

$$= \iint_R (F_z \Delta Z + F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y)\ dx\ dy$$

لكن $\Delta Z = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$ ،

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y) dx dy = \iint_R [\frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x} \Delta Z) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y} \Delta Z)] dx dy - \iint_R (\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) dx dy$$

و بإستخدام نظريه جرين التي تنص على ان

$$\iint_R (\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})\ dx\ dy = \int_{\partial R} N\ dx + M\ dy$$

نجد ان

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y) dx dy = \int_{\partial R} (F_{z_x} \Delta Z\, dy - F_{z_y} \Delta Z\, dx) - \iint_R (\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z\ dx\ dy$$

لكن $\Delta Z = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$ ، إذاً

$$\int_{\partial R} (F_{z_x} \Delta Z\, dy - F_{z_y} \Delta Z\, dx) = 0$$

وعليه فإن

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y) dx dy = - \iint_R (\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z\ dx\ dy$$

وبالتالي فإن

$$\delta J = \iint_R \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}\right) \Delta z \, dx \, dy$$

لكن للدالي J قيمه قصوى على $Z(x,y)$ ، اذاً $\delta J = 0$ ، وعليه فإن

$$\iint_R \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}\right) \Delta z \, dx \, dy = 0$$

لكن $F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}$ داله مستمره (متصله) على R . كما ان $\Delta Z = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$ ، اذاً حسب القضيه المساعده (٣ -١ -١ -١) .

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

□

ملاحظه

(١) اذا كان للدالي

$$J[u] = \int_R \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \ldots, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) \, dx_1 \ldots dx_n \in \ell_2$$

وكان للداله $u(x_1, \ldots, x_n)$ ، قيماً محدده في ∂R ، وللدالي $J[u]$ قيمه قصوى على $u(x_1, \ldots, x_n)$ فإن معادله اويلر- لاجرانج هي

$$F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

(٢) اذا كان للدالي

$$J[Z,w] = \iint_R F(x, y, z, w, z_x, z_y, w_x, w_y) \, dx \, dy \in \ell_2$$

قيمه قصوى على $Z(x,y)$ ، $w(x,y)$ ، فإن معادلتي اويلر- لاجرانج هما

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w_y} = 0 \quad ، \quad F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

وبصوره عامه اذا كان للدالي

$$J[u,v] = \int_R \dots \int F(x_1,\dots,x_n,\dots,u,v,u_{x_1},\dots,u_{x_n},v_{x_1},\dots,v_{x_n})\,dx_1\dots dx_n \in \ell_2$$

قيمه قصوى على $u(x_1,\dots,x_n)$ ، $v(x_1,\dots,x_n)$ **فإن معادلتي اويلر ـ لاجرانج هما**

$$F_v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{v_{x_i}} = 0 \text{ ، } F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

(٣) اذا كان للدالي

$$J[z(x,y)] = \iint_R F(x,y,z,z_x,z_y)\;dx\,dy$$

قيمه قصوى بشرط ان

$$K[z(x,y)] = \iint_R G(x,y,z,z_x,z_y)\;dx\,dy = A$$

فإن معادله اويلر ـ لاجرانج للدالي

$$S[z(x,y)] = \iint_R (F+\lambda G)\;dx\,dy$$

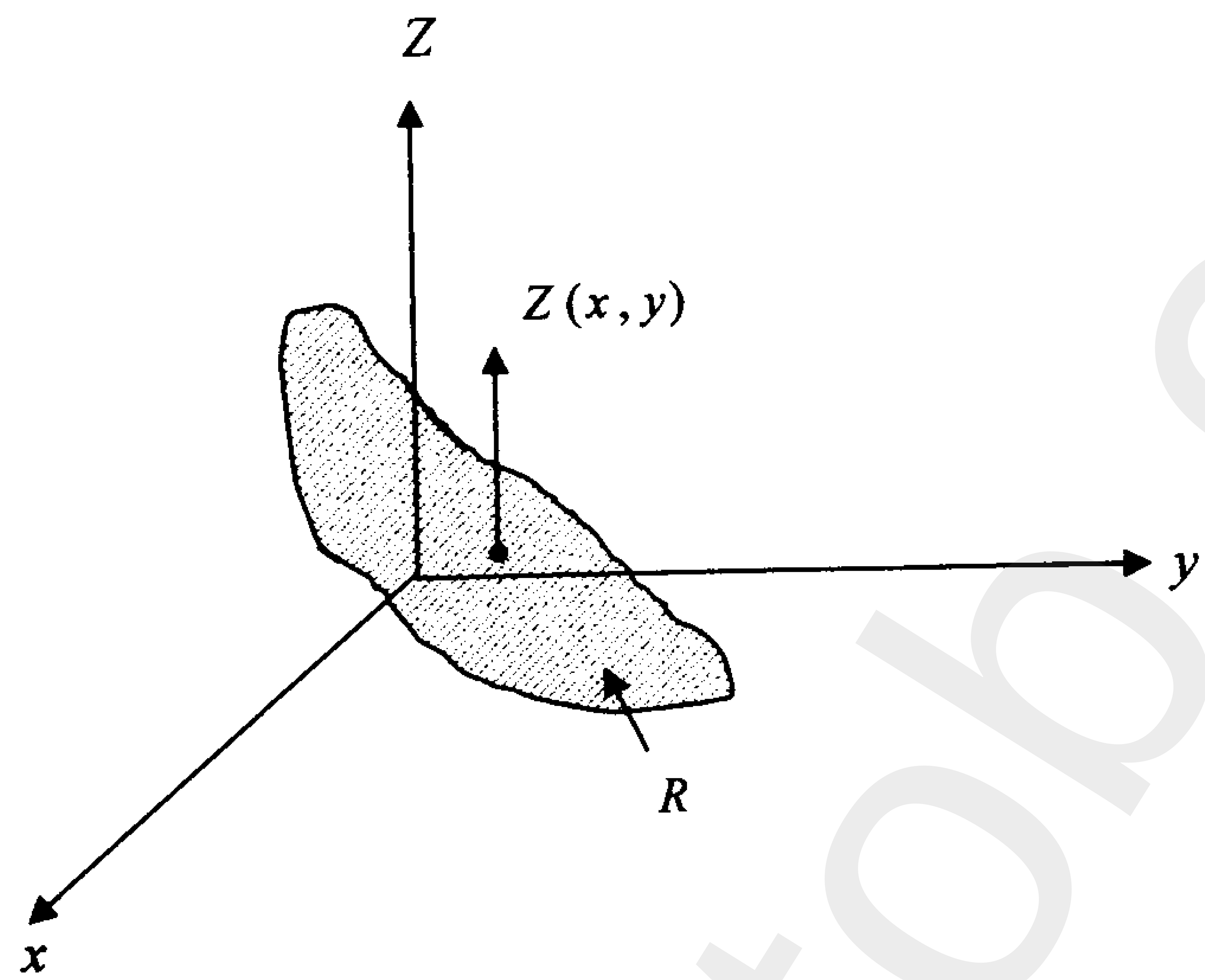
هي

$$F_z + \lambda G_z - \frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x} + \lambda G_{z_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y} + \lambda G_{z_y}) = 0$$

والآن الى بعض التطبيقات والأمثله الآتيه.

<u>مثال ٣ -١ -١</u> : "اصغر سطح Minimal surface Plateau's Problem"

لأيجاد سطح $Z(x,y)$ **متولد من منحني مغلق "انظر الشكل (٣ -١) " مساحته** $S = \iint_R \sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}\;dx\,dy$ **اقل ما يمكن .**



شكل (٣-١)

لاحظ ان معادله اويلر- لاجرانج هي :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Z_x}{\sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Z_y}{\sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}}\right)=0$$

او

$$Z_{xx}(1+Z_y^2)-2Z_xZ_yZ_{xy}+Z_{yy}(1+Z_x^2)=0$$

وهي معادله تفاضليه جزئيه لأصغر سطح وحل مثل تلك المعادله معقد جداً لذلك نستخدم الهندسه التفاضليه في هذا المجال لتحديد معدل التقوس (mean curvature) لذلك السطح ، فان كان التقوس صغيراً كان ذلك السطح ذو اقل مساحه ممكنه ، هذا ونود ان نشير الى ان لانجرانج هو اول من درس السطوح ذات اقل مساحه ممكنه ، اما النظريه العامه لمثل تلك السطوح فتعود الى الفيزيائي البلجيكي الاعمى بلاتو (١٨٠١ - ١٨٣٣م) الذي حدد الكثير من خواص تلك السطوح من خلال تجاربه على فقاعات الصابون ، لأن مثل تلك السطوح يمكن تكوينها من ادخال سلك رفيع له شكل المنحنى المغلق في سائل صابون ثم

رفعه منه .

مثال ٣ -١ -٢ :

اذا كان $J[Z(x,y)] = \iint_R [Z_x^2 + Z_y^2 + 2Z f(x,y)]\, dx\, dy$

فإن معادله اويلر ـ لاجرانج هي

$$Z_{xx}^2 + Z_{yy}^2 = f(x,y)$$

وهذه هي معادله بواسون (١٧٨١ — ١٨٤٠م) التي تستخدم في الفيزياء الرياضيه .

مثال ٣ -١ -٣:

اذا كان

$$J[u(x,y,z)] = \iiint_R (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dx\, dy\, dz$$

فإن معادله اويلر ـ لاجرانج للدالي $J[u]$ هي

$$u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 = 0$$

وهي معادله لابلاس (١٧٤٩ — ١٨٢٧م) ، التي يجب ان يحققها الجهد الكهربائي في فضاء خالي من الشحنات ، ولها ايضاً تطبيقات عديده في الفلك والهندسه التفاضليه والتوصيل الحراري ، وديناميكا الموائع ، وغير ذلك من المسائل في الفيزياء الرياضيه.

مثال ٣ -١ -٤:

سلك منتظم كتلته m لكل وحده طول ، مثبت (مشدود) بين حاملين $= 0$ ، $x = s$ وتحت تأثير شد (توتر) ثابت k فإذا عُملت ذبذبات صغيره سعتها $u(x,t)$ ، فإن الطاقه الحركيه للسلك هي $T = \frac{1}{2} m \int_0^s u_t^2\, dx$ ، اما الطاقه الكامنه (طاقه الوضع) فهي

$$V = \frac{1}{2} k \int_0^s u_x^2 \, dx$$ ،

وعليه فإن

$$J[z(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^s \left(\frac{1}{2} m\, u_t^2 - \frac{1}{2} k\, u_x^2\right) dx\, dt$$

حسب قاعده هاملتون ، ومنها نجد ان $F = \frac{1}{2} m\, u_t^2 - \frac{1}{2} k\, u_x^2$ ، وعليه فإن معادله اويلر- لاجرانج هي

$$F_u - \frac{d}{dt}(F_{u_t}) - \frac{d}{dx}(F_{u_x}) = 0$$

ومنها نجد ان $-m\, u_{tt} + k\, u_{xx} = 0$ وعليه فإن $u_{tt} = a^2\, u_{xx}$ حيث $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ هي معادله حركه السلك ، وهي معادله انتشار الموجات ببعد واحد .

<u>مثال ٣ -١ -٥</u> : معادله شرودنجر Schrödinger's Equation

يمكن اشتقاق معادله شرودنجر في ميكانيكا الكم بإستخدام حساب التغيرات كالآتي.

نفرض ان $H = -k\nabla^2 + V(x, y, z)$ حيث $k = \frac{h^2}{8\pi^2 m}$ ، m كتله الجسيم الذي تدرس حركته ، h ثابت بلانك ، V طاقه الوضع (الطاقه الكامنه) للجسيم ، H مؤثر هاملتون (Hamilton Operator) او مؤثر الطاقه (Energy Operator) ، $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ولأيجاد داله Ψ بحيث ان للدالي

$$E = J[\Psi, \Psi^*] = \iiint_R \Psi^* (H\, \Psi)\, dx\, dy\, dz \quad \dots (1)$$

قيمه قصوى بشرط ان

$$G[\Psi, \Psi^*] = \iiint_R \Psi^* \Psi\, dx\, dy\, dz = 1 \quad \dots (2)$$

حيث Ψ^* مرافق Ψ ، كما ان لكل من Ψ ، Ψ^* نفس القيم ونفس المشتقات عند

الحدود المتقابله او انها تنعدم على ∂R . لاحظ ان بالتكامل بالتجزئه نجد ان

$$\int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\, dx = \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2} - \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx$$

$$= 0 - \int \Psi_x^* \cdot \Psi_x \, dx = - \int \Psi_x^* \cdot \Psi_x \, dx$$

اذاً

$$\iiint_R \Psi^* (-k\nabla^2 + V)\Psi \, dx\, dy\, dz = \iiint_R [k(\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) + \Psi^* \Psi V]\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_R [k(\Psi_x \Psi_x^* + \Psi_y \Psi_y^* + \Psi_z \Psi_z^*) + \Psi^* \Psi V]\, dx\, dy\, dz \quad \dots (3)$$

ومن (2) ، (3) نجد ان

$$S[\Psi, \Psi^*] = \iiint_R [k(\Psi_x \Psi_x^* + \Psi_y \Psi_y^* + \Psi_z \Psi_z^*) + \Psi^* \Psi V + \lambda \Psi \Psi^*]\, dx\, dy\, dz$$

وعليه فإن معادلات اويلر ـ لاجرانج هي

$$F_\Psi - \frac{\partial}{\partial x}(F_{\Psi_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{\Psi_y}) - \frac{\partial}{\partial z}(F_{\Psi_z}) = 0$$

$$F_{\Psi^*} - \frac{\partial}{\partial x}(F_{\Psi_x^*}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{\Psi_y^*}) - \frac{\partial}{\partial z}(F_{\Psi_z^*}) = 0$$

وبالتالي فإن

$$V\Psi^* + \lambda \Psi^* - k[\Psi_{xx}^* + \Psi_{yy}^* + \Psi_{zz}^*] = 0 \quad \dots (4)$$

$$V\Psi + \lambda \Psi - k[\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz}] = 0 \quad \dots (5)$$

لكن

$$H\Psi = -k\nabla^2 + \Psi V$$

$$= -k\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz}\ \Psi V$$

اذاً (5) هي

$$H\Psi = -\lambda\Psi \quad \dots (6)$$

ولتحديد قيمه λ نظرب طرفي (6) في Ψ^* فنجد ان

$$H\Psi\Psi^* = -\lambda\Psi\Psi^*$$

وعليه فإن

$$E = \iiint_R \Psi H \Psi^* \; dx\,dy\,dz = -\lambda \iiint_R \Psi \Psi^* \; dx\,dy\,dz = -\lambda$$

وبالتعويض في (6) نجد ان

$H\Psi = E\Psi$ ، وهي معادله شرو دنجر في ميكانيكا الكم .

٣ -٢ : المسأله العكسيه "Inverse Problem"

وهي ايجاد مجموعه الدوال $F(x,y,y')$ ، بحيث ان $y(x)$ حل لمعادله اويلر- لاجرانج للدالي $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\,dx$.

ولتحديد مجموعه الدوال القابله للتكامل $F(x,y,y')$ بحيث انه اذا كانت

$$g \in D_2 \text{ ، } g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

وكانت $y(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ ، بحيث ان

$y(x) = g(x,\alpha,\beta)$ ، حل لمعادله اويلر – لاجرانج الآتيه : ...(1)

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y = 0 \Rightarrow F_{y'y'}.y'' + F_{yy'}.y' + F_{xy'} - F_y = 0 \qquad ...(2)$$

افرض ان $F_{y'y'} \neq 0$ ، كما ان $F(x,y,y')$ قابله للإشتقاق وللحصول على المعادله التفاضليه التي حلها العام مُمثلّ في المعادله (1) نفرض امكانية حذف ثوابت التكامل α , β ، أي انه توجد دوال متصله

$$\phi : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$\Psi : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ، بحيث ان

$$\begin{aligned} y(x) &= g\,[x, \phi(x,y,y'), \Psi(x,y,y')] \\ y'(x) &= g_x\,[x, \phi(x,y,y'), \Psi(x,y,y')] \end{aligned} \qquad ... (4)$$

وهذا يعني انه يمكن ايجاد α , β بدلاله x,y,y' من المعادلتين

$$y'(x) = g_x(x,\alpha,\beta) \quad \text{،} \quad y(x) = g(x,\alpha,\beta)$$

وبالتالي فإن

$$y''(x) = G(x, y, y') \qquad \dots (5)$$

حيث $G : [a,b] \times R^2 \to R$ ، $G(x, y, y') = g_{xx}\, [x, \phi(x, y, y'), \Psi(x, y, y')]$

وعليه فإن المعادله (5) تمثل المعادله التفاضليه ذات الحل العام (1) . والآن لتحديد الداله $F(x, y, y')$ بحيث ان المعادله (5) تمثل حل لمعادله اويلر – لاجرانج (2) لاحظ ان

$$F_y - F_{xy'} - y'\, F_{yy'} = G\, F_{y'y'} \qquad \dots (6)$$

وحيث ان (1) تمثل الحل العام للمعادله (6) ، اذاً يجب ايجاد حل لكل شرط ابتدائي $(y(a)\ ,\ y'(a)) \in R^2$ ، وعليه فإن المعادله (6) تتحقق لكل $(x, y, y') \in [a,b] \times R^2$ ويإجراء التفاضل للمعادله (6) بالنسبه الى y' ثم الفرض بأن :

$$F_{y'y'}(x, y, y') = K(x, y, y') \qquad \dots (7)$$

حيث $K : [a,b] \times R^2 \to R$ ، نجد ان :

$$K_x + y'K_y + GK_{y'} + G_{y'}K = 0 \qquad \dots (8)$$

وهي معادله تفاضليه جزئيه في المتغير K ، وبالتالي فإن الحل العام للمعادله (8) هو ""يمكن التأكد من ذلك بالتعويض""

$$K(x, y, y') = \frac{u(\phi, \Psi)}{v(x, \phi, \Psi)} \qquad \dots (9)$$

حيث $u : R^2 \to R$ داله تفاضليه غير صفريه وماعدا ذلك فهي اختياريه ،

$$v(x, \alpha, \beta) = \exp(\int G_{y'}\, (x, g(x, \alpha, \beta), g_x\, (x, \alpha, \beta)\ dx) \qquad \dots (10)$$

اذاً يمكن ايجاد الداله $F(x, y, y')$ من المعادله (9) كالآتي

$$F(x, y, y') = \int_0^{y'}\!\!\int_0^{r} K(x, y, p)\ dp\, dr + y'\lambda(x, y) + \mu(x, y) \qquad \dots (11)$$

حيث $\lambda : [a,b] \times R \to R$ ، $\mu : [a,b] \times R \to R$ دوال اختياريه ، اما بالنسبه

للداله $F(x,y,y')$ فيجب ان تكون المعادله (6) متحققه .

مثال ٣ -٢ -١ :

اوجد الدوال القابله للتكامل $F(x,y,y')$ والتي تكون منحنياتها القصوى خطوط مستقيمه

الحل

نفرض ان $y(x) = \alpha x + \beta$ ، اذاً من المعادله (4) نجد ان

$$\Psi(x,y,y') = y - xy' \quad , \quad \phi(x,y,y') = y'$$

لكن $y''(x) = 0$ اذاً $G(x,y,y') = 0$ ، وعليه فإن المعادله (10) تصبح كالآتي :

$$v(x,\alpha,\beta) = 1$$

وبالتالي فإن معادله (9) تأخذ الشكل

$$K(x,y,y') = u(y', y - xy')$$

والحصول على الدوال $F(x,y,y')$ يتم بإجراء التكامل بالتجزئه كالآتي

$$\int_0^{y'}\int_0^{r} K(x,y,p)\, dp\, dr = r\int_0^{r} K(x,y,p)\, dp\Big]_0^{y'} - \int_0^{y'} r\,K(x,y,r)\, dr$$

$$= \int_0^{r} (y-r)\,K(x,y,r)\, dr$$

ومن ثم فإن المعادله (11) تصبح كالآتي

$$F(x,y,y') = \int_0^{r} (y-r)\, u(r, y-xr)\, dr + y'\lambda(x,y) + \mu(x,y)$$

و $F(x,y,y')$ تحقق المعادله (6) .

والآن نفرض ان $z = y - xr$ ، اذاً

$$u(r, y-xr) = u(r,z)$$

ومنها نجد ان $u_y = u_z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = u_z$ ، $u_x = u_z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -r u_z$

وبالتعويض في (6) نجد ان $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y}$

وعليه توجد داله $\omega : R^2 \to R$ بحيث ان ω_y ، $\lambda(x,y) = \omega_y$ ، $\mu(x,y) = \omega_x$

والتي تمثل قيوداً (شروطاً) على الدالتين λ , μ .

مثال ٣ -٢ -٢ :

إذا اثرت قوه $P = P(x,y)$ على جسيم كتلته ١ غم ، فازاحته مسافه قدرها y سم . فإنه حسب قانون نيوتن الثاني للحركه نجد ان $P = ma = 1.y'' = y''$.

والآن نفرض ان القوه P ناتجه من تفاضل طاقه الوضع (الطاقه الكامنه) V للجسيم ، اذاً $V : R^2 \to R$ ، $P = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$ ، ومن قاعده هاملتون نجد ان معادله حركه الجسيم تكون حلاً لمعادله اويلر- لاجرانج للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [\tfrac{1}{2} y'^2 + V(x,y)]\, dx$$

حيث $y(x_1) = y_1$ ، $y(x_0) = y_0$

وهذا يعني ان $\frac{\partial V}{\partial y} - y'' = 0$ وهذا هو قانون نيوتن الثاني مره أخرى .

اما اذا كانت القوه P ليست مشتقه من الجهد ، فأفرض انها داله ، تعتمد على x, y, y' ، ولتكن G ، اذاً معادله الحركه هي

$$G(x,y,y') = y''(x) \qquad \dots (12)$$

واذا كان الحل العام للمعادله (12) معلوم ، فيمكننا الحصول على عدد لانهائي من الداليات التي تكون لها المعادله (12) معادله اويلر- لاجرانج ، ولتعيين داله القوه G والتكامل المناظر لها والتي لها المعادله (12) معادله اويلر- لاجرانج ، نفرض ان $a, b, c : R^2 \to R$ دوال من النوع ℓ ، وأفرض ان

$$G(x,y,y') = a(x,y) + b(x)y' + c(y)y'^2 \qquad \dots (13)$$

وهذا ضروري لحل المعادله (12) . والآن إعتبر ان الداله u في المعادله (9) داله

اختياريه قابله للتفاضل وغير صفريه ، اذاً يمكن ان نفرض ان

$$u(\alpha,\beta) = 1$$

وعليه فإن

$$K(x,y,y') = v^{-1}[x,\phi(x,y,y'),\Psi(x,y,y')]$$

وبإستخدام المعادلتين (10) ، (13) نجد ان

$$v[x,\phi(x,y,y'),\Psi(x,y,y')] = e^{\int b(x)dx + 2\int c(y)dy} = \theta(x,y)$$

وعليه فإن معادله (11) تصبح كالآتي

$$F(x,y,y') = \tfrac{1}{2}\theta^{-1}(x,y)\,y'^2 + \int a(x,y)\,\theta^{-1}(x,y)\,dy \qquad \dots (14)$$

ومن ثم فإن المعادله

$$y'' = a(x,y) + b(x)\,y' + c(y)\,y'^2$$

تمثل معادله اويلر- لاجرانج للدالي

$$J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

حيث F معرفه بالمعادله (14) .

اما اذا كانت داله القوه G مشتقه من الطاقه الكامنه ، فإن

$$G(x,y,y') = a(x,y) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

وتكون المعادله (14) هي

$$F(x,y,y') = \tfrac{1}{2}y'^2 + V(x,y)$$

وبذلك نصل مره أخرى الى قاعده هاملتون كحاله خاصه .

تمارين

(١) اوجد معادله ـ اويلر لاجرانج لكل مما يأتي

$$J[Z(x,y)] = \iint_R (Z_{xx} + Z_{yy})^2 \, dx\, dy \quad (أ)$$

$$J[Z] = \iint_R (Z_x^2 + Z_y^2) \, dx\, dy \quad (ب)$$

$$J[Z] = \iint_R [1 + \tfrac{1}{2}(Z_x^2 + Z_y^2)] \, dx\, dy \quad (جـ)$$

$$J[u(x,y,z)] = \iiint_R \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \, dx\, dy\, dz \quad (د)$$

$$J[u] = \iiint_R [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] \, dx\, dy\, dz \quad (هـ)$$

$$J[u] = \iiint_R [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u\, f(x,y,z)] \, dx\, dy\, dz \quad (و)$$

(٢) غشاء مهتز (vibrating membrane) ذو سطح متجانس (منتظم) يمكن التعبير عن معادله سطحه بالشكل :

$Z = Z(x,y,t)$ لكل $(x,y) \in R$ حيث R هو مسقط سطح الغشاء على R^2 الذي يصنع ازاحه عموديه للغشاء بإتجاه (x,y) في الزمن t . فإذا كانت الطاقه الكامنه (طاقه الوضع) للغشاء المهتز اهتزازاً طفيفاً هي $V = \frac{K}{2} \iint_R (Z_x^2 + Z_y^2) \, dx\, dy$ ، حيث K ثابت يقيس الشد الحاصل في السطح نتيجة لذلك الأهتزاز ، اما الطاقه الحركيه فهي $T = \frac{m}{2A} \iint_R Z_t^2 \, dx\, dy$ ، حيث m الكتله الكليه للسطح ، A مساحة المنطقه R في R^2 . فإذا كانت

$$A(Z) = \int_0^{t_1} (T - V)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \iint_R [\rho Z_t^2 - K(Z_x^2 + Z_y^2)] \, dx\, dy\, dt$$

حيث $\rho = \dfrac{m}{A}$ ، فاثبت ان معادله حركه الغشاء هي

$\rho Z_{tt} = K(Z_{xx} + Z_{yy})$ لكل $t \in [t_0, t_1$ ، ولكل $(x,y) \in R$

(٣) اذا كانت $y = y(x)$ منحنياً حرجاً (منحني توقف) للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\ dx$$

فأوجد $F(x,y,y')$ عندما

(ا) $y(x) = \sqrt{c^2 - (x-d)^2}$ حيث $c\ ,\ d$ ثوابت

(ب) $y'' = -ky$ ، $0 < K \in \mathrm{R}$

مسائل التغيرات ذات نقاط اطراف متحركه

درسنا في الفصول السابقه مسائل التغيرات بنقط اطراف ثابته ، وسنركز اهتمامنا في هذا الفصل على دراسة مسائل التغيرات بنقط اطراف متحركه (متغيره) وبعض تطبيقاتها مثل معادله هاملتون ـ جاكوبي ، وقد ضم هذا الفصل اربعه بنود تناولنا في الأول منها مسائل التغيرات بالنسبه للدالي $J[y]$ عندما تتحرك نقطتي الأطراف على مستقيمين متوازيين ، وعندما تتحرك نقطتي الأطراف على منحنيين وتناولنا في البند الثاني مسائل التغيرات بنقط اطراف متحركه بالنسبه للداليات العديده المتغيرات ، اما في البند الثالث ، فقد درست معادله هاملتون ـ جاكوبي وبعض تطبيقاتها ، وتناولنا في البند الأخير مسائل التغيرات بنقاط ركنيه.

٤ -١: مسائل التغيرات للدالي $J[y]$ بنقاط اطراف متحركه

يضم هذا البند جزئين ، تناولنا في الأول منها منحنيات القيم القصوى ، اذا تحركت نقطتي الأطراف على مستقيمين متوازيين ، وتناولنا في الثاني منحنيات القيم القصوى ، عندما تتحرك نقطتي الأطراف على منحنيين .

٤ -١ -١: ابسط المسائل بنقط أطراف متحركه

يظم هذا الجزء تحديد الشروط اللازمه لوجود المنحنيات الحرجه للدالي $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\ dx$ ، عندما تتحرك نقطتي طرفي المنحنيات $y(x)$ على

المستقيمين المتوازيين $x = a$ ، $x = b$ ، انظر شكل (٤ -١) ولتحديد تلك الشروط لاحظ ان

$$\Delta J = J[y + \varepsilon \Delta y] - J[y]$$
$$= \int_a^b [F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') - F(x, y, y')] \, dx$$

اذاً

$$\delta J = \int_a^b (F_y \Delta y + F_{y'} \Delta y') \, dx \qquad \dots (1)$$

وبالتكامل بالتجزئه نجد ان :

$$\delta J = \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \Delta y(x) \, dx + [F_{y'} \Delta y(x)]_{x=a}^{x=b}$$
$$= \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \Delta y(x) \, dx + F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) - F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) \qquad \dots (2)$$

وعندما $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$ ، نجد ان $\delta J = 0$ يعني ان

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \Delta y(x) \, dx = 0$$

وبالتالي فأن $\quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \qquad \dots (3)$ ، لكل $a < x < b$

اذاً لكي يكون المنحني $y(x)$ حلاً لمسأله التغيرات بنقاط اطراف متحركه ، يجب ان يكون $y(x)$ منحني قيمة قصوى للدالي $J[y]$ ، وهذا يعني ان $y(x)$ يجب ان يحقق معادله اويلر- لاجرانج (3) . لكن اذا كان $y(x)$ قيمه قصوى للتكامل في (2) ، فإن $\delta J = 0$ يعني ان

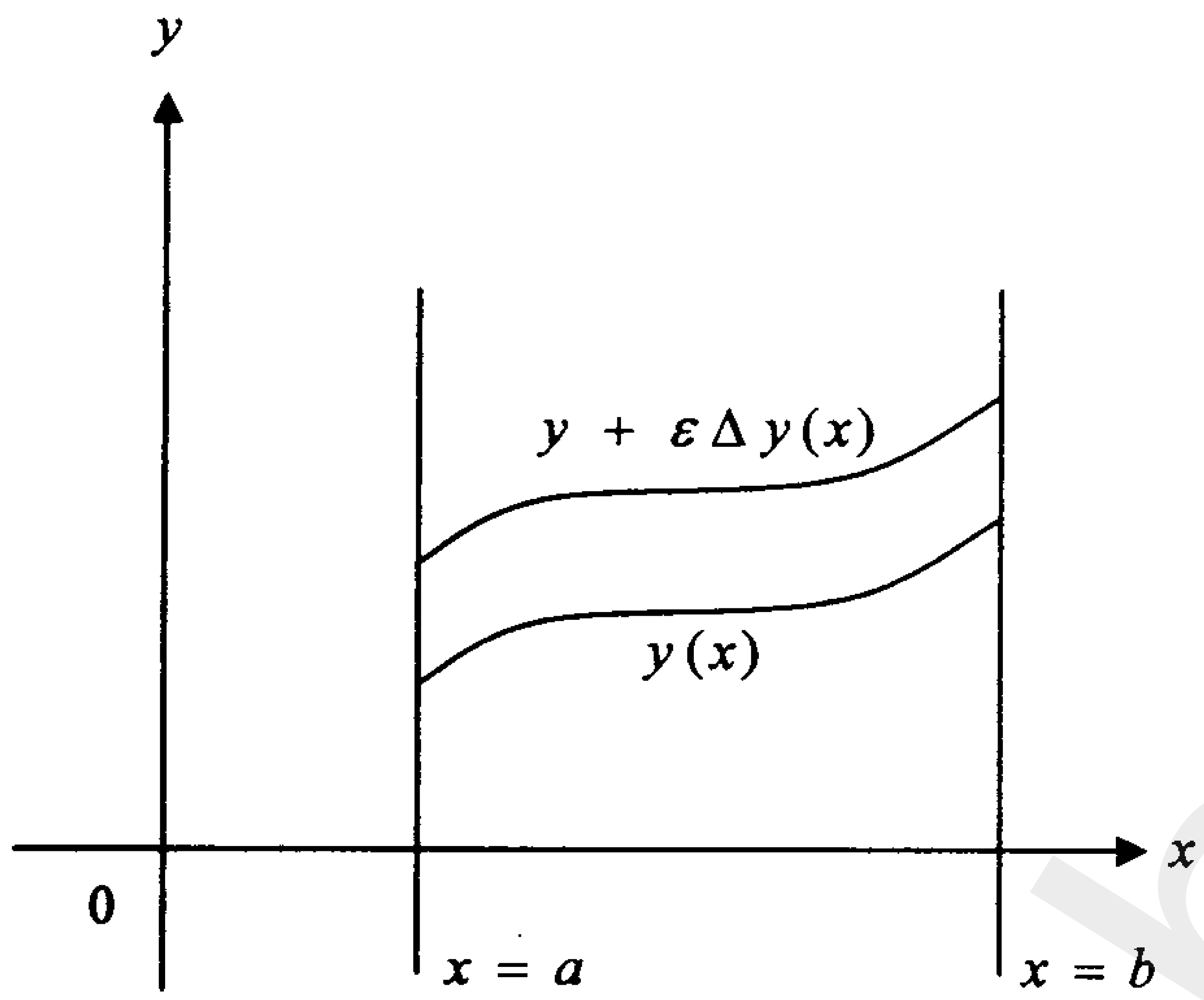
$$F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) - F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) = 0$$

ومنها نجد ان

$$F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) = 0 \quad \text{،} \quad F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) = 0 \qquad \dots (4)$$

لأن $\Delta y(x)$ داله اختياريه غير صفريه عند a, b .

إذاً لحل مسأله التغيرات بنقط اطراف متغيره ، يجب اولاً حل معادله اويلر – لاجرانج ثم استخدام الشرط (4) لعيين الثوابت الأختباريه .



شكل (٤ -١) .

<u>**مثال ٤ -١ -١**</u> :

اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$J[y] = \int_0^1 y'^2 \, dx$ ، حيث $y(0)$ ، $y(1)$ ليست ثابته.

<u>**الحل**</u>

بما ان معادله اويلر– لاجرانج للدالي $J[y]$ ، هي $y'' = 0$ ، اذاً $y = ax + b$.

ولكي نوجد a , b نستخدم الشرط (4) ، وهو

$$F_{y'}|_{x=1} = 0 \quad ، \quad F_{y'}|_{x=0} = 0$$

لكن $F_{y'} = 2y' = 0$ ، يعني ان $y = b$ هو المنحني الحرج للدالي $J[y]$.

ملاحظه:

اذا كان $y(a) = A$ ، $y(b)$ متغيره ، فإن وجود قيمه قصوى للدالي $J[y]$ يعني ان

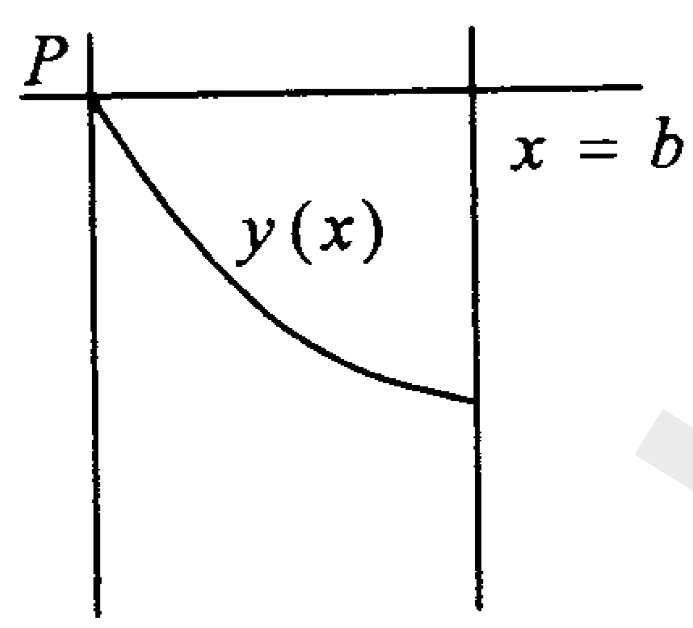
$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{لكل} \quad a \le x < b \quad \text{و} \quad F_{y'}|_{x=b} = 0$$

مثال ٤ -١ -٢ :

انزلق جسم ثقيل من النقطه $P(a, A)$ الى اسفل على منحني في مستوٍ رأسي . ما شكل المنحني الذي يحدده الجسم ليصل الى الخط الرأسي $x = b$ ، $b \neq a$ في اقل زمن ممكن .

الحل

نفرض ان نقطه الأنطلاق منطبقه على نقطه الأصل للنظام الاحداثي xy كما في شكل (٤ -٢) .



شكل (٤ -٢)

إذاً $$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = \sqrt{1 + y'^2}\ \frac{dx}{dt}$$

وعليه فإن $$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}\ dx$$

لكن $\frac{1}{2} m v^2 = m g y$ ، حيث g ثابت الجاذبيه الأرضيه

اذاً $v = \sqrt{2gy}$ ، وعليه فإن $dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ ، وبالتالي فإن $t = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}\ dx$

وعليه فإن $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ ، ومنها نجد ان معادله اويلر - لاجرانج $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ تأخذ الشكل

$$\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C \quad ، \quad F_{y'}|_{x=b} = 0 \qquad \dots (1)$$

وحيث ان الحل العام لمعادله اويلر ـ لاجرانج "" انظر مثال (٢ -١ -٩)"" ، هو

$$y = r(1 - Cos\theta) \quad ، \quad x = r(\theta - Sin\theta)$$

وهو منحني دحروجي (cycloid) . اذاً لتحديد r نستخدم الشرط $F_{y'}|_{x=b} = 0$ فنجد ان

$$\frac{y'}{\sqrt{2g\,y(1 + y'^2)}}|_{x=b} = 0$$

وعليه فإن $y'|_{x=b} = 0$ ، وبالتالي فإن المماس للمنحني $y(x)$ عند طرفه الأيمن مماس افقي ، وهذا يعني ان $\theta = \pi$ عندما $x = b$.

اذاً

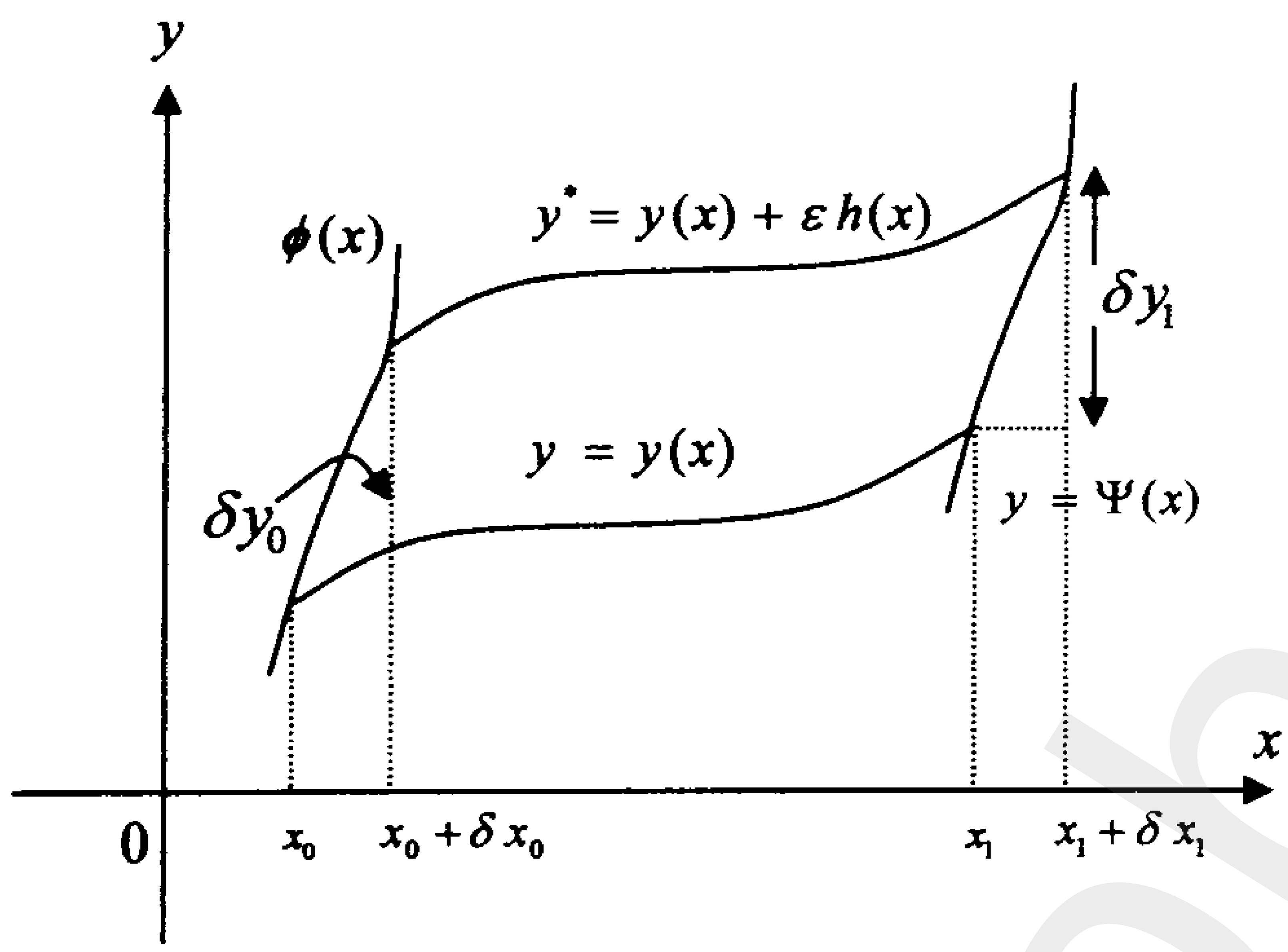
$$b = r(\pi - Sin\pi) = r\pi$$

وعليه فإن $r = \frac{b}{\pi}$ ، وبالتالي فإن المنحني المطلوب هو

$$y = \frac{b}{\pi}(1 - Cos\theta) \quad ، \quad x = \frac{b}{\pi}(\theta - Sin\theta)$$

٤ -١ -٢: المنحنيات الحرجه للدالي $J[y]$ عندما تتحرك نقطتي الأطراف على منحنيين

لتحديد الشروط اللازمه لوجود منحنيات قيم قصوى للدالي $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ في هذه الحاله ، نفرض ان (x_0, y_0) ، (x_1, y_1) تمثلان نقطتي النهايه للمنحني $y(x)$ ، وان (x_0, y_0) تتحرك على المنحني $y = \phi(x)$ بينما تتحرك (x_1, y_1) على المنحني $y = \Psi(x)$ ، ولنفرض ان $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ ، $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ تمثلان نقطتي النهايه للمنحني $y^* = y(x) + \varepsilon h(x)$ انظر شكل (٤ -٣) .



شكل (٤ -٣) .

اذاً

$$\Delta J[y] = J[y + \varepsilon h] - J[y]$$
$$= \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

وعليه فإن

$$\Delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h') - F(x, y, y')]\, dx$$
$$+ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\, dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\, dx$$

وبالتالي فإن

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\, h(x)\, dx + \left[F_{y'}\, h(x) + F\delta(x)\right]_{x_0}^{x_1}$$

لكن من شكل (٤ -٣) ، نجد ان

$$h(x_1) = \delta y_1 - y'(x_1)\, \delta x_1 \quad ، \quad h(x_0) = \delta y_0 - y'(x_0)\, \delta x_0$$

اذاً

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\, h(x)dx + \left[F_{y'}\,\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + (F - F_{y'y'})\ \delta x\Big|_{x_0}^{x_1} \quad \dots (1)$$

وتسمى المعادله (1) التغير العام (general variation) للدالي $J[y]$.

وعندما يكون للدالي $J[y]$ قيمه قصوى على $y(x)$ نجد ان $\delta J = 0$ وعليه فإن

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\, h(x)dx + F_{y'}\,\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + (F - F_{y'y'})\ \delta x\Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

لكن $\delta y_1 = (\phi^1(x_1) + \varepsilon_1)\,\delta x_1$ ، $\delta y_0 = (\phi^1(x_0) + \varepsilon_0)\,\delta x_0$

و $\delta x_1 \to 0$ عندما $\varepsilon_1 \to 0$ ، $\delta x_0 \to 0$ عندما $\varepsilon_0 \to 0$

وبالتالي فإن $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ ،

$$[F_{y'}\Psi' + F - y'F_{y'}]_{x=x_1}\,\delta x_1 - (F_{y'}\phi' + F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0}\delta x_0 = 0 \quad \dots (2)$$

وحيث ان δx_0 ، δx_1 مستقلتين عن بعضهما ، اذاً (2) تعني ان

$$F_{y'}\phi' + F - y'F_{y'}\Big|_{x=x_0} = 0 \text{ ،}$$

$$F_{y'}\Psi' + F - y'F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0$$

وعليه فإن

$$\left.\begin{aligned} F + (\phi' - y')F_{y'}\Big|_{x=x_0} &= 0 \\ F + (\Psi' - y')F_{y'}\Big|_{x=x_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots (3)$$

والتي يطلق عليها الشروط الأعتراضيه (Transversality Conditions) . اذاً لحل كل مسائل التغيرات من هذا النوع ، يجب ان تحل معادله اويلر ـ لاجرانج $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ ، ثم تستخدم الشروط الأعتراضيه (3) لأيجاد الثوابت الوارده في حل معادله اويلر ـ لاجرانج .

<u>ملاحظه</u> : للتعبير عن المعادله (3) بالشكل القانوني ، نفرض ان $P = F_{y'}$ ، $H = p\,y' - F$ ، اذاً

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\, h(x)\,dx + \left[P\,\delta y - H\,\delta x\right]_{x=x_0}^{x=x_1} \quad \dots (4)$$

واذا كان للدالي $J[y]$ قيمه قصوى على $y(x)$ ، فإن $y(x)$ يجب ان تحقق الشروط الآتيه

$$\left.\begin{aligned} x_0 < x < x_1 \ , \ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= 0 \ , \\ P\,\delta y - H\,\delta x \Big]_{x=x_0}^{x=x_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ (5)$$

واذا كانت $x_0 \ , \ x_1$ ثابتين ، فإن $\delta x = 0$ ، $\delta y = 0$ وعليه فإن (5) تصبح كالاتي

$$a \le x \le b \quad ، \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

اما اذا كانت $x = a$ ، $x = b$ ، فإن $\delta x = 0$ ، $\delta y = h(x)$.

<u>مثال ٤ -١ -٣</u>: اوجد الشروط الأعتراضيه للدالي

$$J[y] = \int_a^b A(x,y) \sqrt{1 + y'^2} \ dx$$

<u>الحل</u>

بما ان

$$F(x,y,z) = A(x,y) \sqrt{1 + y'^2}$$

اذاً

$$F_{y'} = \frac{A(x,y)\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{F(x,y,y')\,y'}{1 + y'^2}$$

وعليه فإن الشروط الأعتراضيه هي

$$F + (\phi' - y')F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 + y'\phi')F}{1 + y'^2} = 0$$

$$F + (\Psi' - y')F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 + y'\Psi')F}{1 + y'^2} = 0$$

ومنها نجد ان $y'\psi' = -1$ ، $y'\phi' = -1$

وبالتالي فإن شرطي الأعتراض في هذه الحاله هي شروط التعامد .

مثال ٤ -١ -٤ :

ادرس منحنيات القيم القصوى للدالي

$$y(b) = b - 5 \text{ ، } y(0) = 0 \quad \text{،} \quad J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\, dx$$

الحل

بما ان

$$F = F(y, y') \text{ ،}$$

اذاً التكامل الاول لمعادله اويلر ـ لاجرانج هو

$$F - y' F_{y'} = c_1 \text{ ،}$$

وعليه فإن

$$\frac{1}{y\sqrt{1 + y'^2}} = c_1 \text{ ،}$$

ومنها نجد ان

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{c_1} = c \text{ ،}$$

وبالتالي فإن

$$y' = \frac{1}{y}\sqrt{c^2 - y^2} \text{ ،}$$

وعليه فإن

$$(c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}\, y\, dy = dx \text{ .}$$

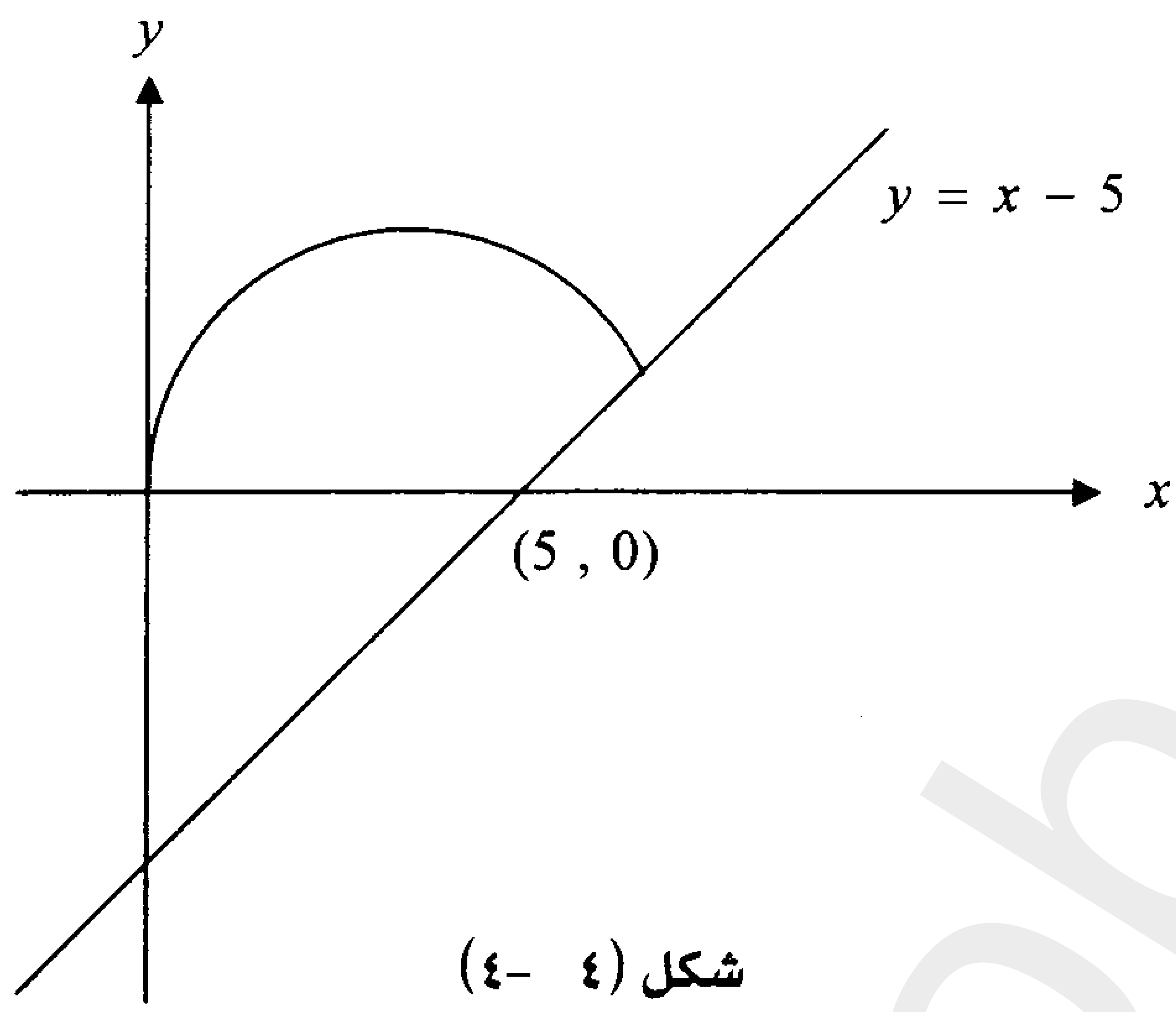
إذاً

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2 \text{ .}$$

لكن

$y(0) = 0$ ، اذاً $a = c$.

وحيث ان شرط الأعتراض للدالي $J[y]$ يتحول الى شرط التعامد حسب المثال (٤ -١ -٣) ، اذاً الخط المستقيم $y(b) = b - 5$ يجب ان يكون قطراً في الدائره ، ومن ثم فإن مركز تلك الدائره يقع على النقطه $(5 , 0)$ لان المستقيم $y(b) = b - 5$ يقطع محور السينات . إذاً $(x - 5)^2 + y^2 = 25$ ، وعليه فإن $y = \mp\sqrt{10x - x^2}$ وبالتالي فإنه يمكن الحصول على القيم القصوى للدالي $J[y]$ ، على أقواس من الدائره $y = -\sqrt{10x - x^2}$ ، $y = \sqrt{10x - x^2}$ شكل (٤ -٤)



شكل (٤ -٤)

ملاحظه:

(أ) اذا كانت $A(x_0\,,\,y_0)$ ثابته وكانت نقطة الحدود $B(x_1,\,y_1)$ تتحرك على خط رأسي $x = x_1$ ، فإن $\delta x_1 = 0$ ، وبالتالي فإن الشرط الضروري لوجود قيم قصوى هو $F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0$ ، $F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0$

(ب) إذا كانت $A(x_0\,,\,y_0)$ ثابته ونقطة الحدود $B(x_1,\,y_1)$ تتحرك على خط مستقيم افقي $y = y_1$ ، فإن الشرط الضروري لوجود قيم قصوى هو

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \ ، \ (F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} = 0$$

٤ -٢ : داليات عديدة المتغيرات

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على منحنيات القيم القصوى للدالي $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,dx$ ، اذا وقعت نقطتي النهاية $A(x_0\,,\,y_0\,,z_0)$ ، $B(x_1\,,\,y_1\,,z_1)$ على سطحين ، ثم نعمم ذلك بالنسبه للداليات $J[y_1\,,\ldots,y_n]$.

ولايجاد منحني من بين كل المنحنيات التي تقع نقطتي نهايتها على السطحين $\phi(y,z)$ ، $\Psi(y,z)$ ، يجعل الدالي $J[y,z]$ يملك قيماً قصوى ، لاحظ ان

$$\Delta J = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx - \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx$$

اذاً

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\,\delta y + (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})\,\delta z]\,dx + \left[F\,\delta x + F_{y'}\,\delta y + F_{z'}\,\delta z\right]_{x_0}^{x_1}$$

وعليه فإن $\delta J = 0$ يعني ان

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \qquad \dots (1)$$

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0 \qquad \dots (2)$$

$$\left[F\,\delta x + F_{y'}\,\delta y + F_{z'}\,\delta z\right]_{x_0}^{x_1} = 0 \qquad \dots (3)$$

و اذا فرضنا ان $y(x_i) = y_i$ ، $z(x_i) = z_i$ ، $i = 0,1$ نجد ان

$$\delta y\big|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1 \quad ، \quad \delta y\big|_{x=x_0} = \delta y_0 - y'(x_0)\,\delta x_0$$

$$\delta z\big|_{x=x_1} = \delta z_1 - z'(x_1)\,\delta x_1 \quad ، \quad \delta z\big|_{x=x_0} = \delta z_0 - z'(x_0)\,\delta x_0$$

وعليه فإن

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\big|_{x=x_0}\,\delta x_0 + F_{y'}\big|_{x=x_0}\,\delta y_0 + F_{z'}\big|_{x=x_0}\,\delta z_0 = 0 \qquad \dots (4)$$

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\big|_{x=x_1}\,\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\,\delta y_1 + F_{z'}\big|_{x=x_1}\,\delta z_1 = 0 \qquad \dots (5)$$

لكن $A(x_0, y_0, z_0)$ تقع على السطح $z = \phi(x, y)$ بينما $B(x_1, y_1, z_1)$ تقع على السطح $z = \Psi(x, y)$ ، إذاً

$$\left.\begin{aligned}\delta z_0 &= \phi'_{x_0}\,\delta x_0 + \phi'_{y_0}\,\delta y_0 \\ \delta z_1 &= \phi'_{x_1}\,\delta x_1 + \phi'_{y_1}\,\delta y_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

ومن (4) ، (5) ، (6) نجد ان

$$F - y'F_y - z'F_{z'}\Big|_{x=x_0}\delta x_0 + F_y\Big|_{x=x_0}\delta y_0 + F_{z'}\Big|_{x=x_0}(\phi'_{x_0}\,\delta x_0 + \phi'_{y_0}\,\delta y_0) = 0$$

$$F - y'F_y - z'F_{z'}\Big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_y\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1}(\phi'_{x_1}\,\delta x_1 + \phi'_{y_1}\,\delta y_1) = 0$$

وعليه فإن

$$\left[F - y'F_{y'} + (\phi'_{x_0} - z')F_{z'}\right]\delta x_0 + (F_{y'} + \phi'_{y_0}F_{z'})\,\delta y_0\Big|_{x=x_0} = 0$$

$$\left[F - y'F_{y'} + (\phi'_{x_1} - z')F_{z'}\right]\delta x_1 + (F_{y'} + \phi'_{y_1}F_{z'})\,\delta y_1\Big|_{x=x_1} = 0$$

وحيث ان δx_0 ، δy_0 مستقله عن بعضها ، وكذلك δx_1 ، δy_1 مستقله عن بعضهما ايضاً ، اذاً

$$F - y'F_{y'} + (\phi'_{x_0} - z')F_{z'} = 0 \quad \ldots (7)$$

$$F_{y'} + \phi'_{y_0}F_{z'} = 0 \quad \ldots (8)$$

$$F - y'F_{y'} + (\Psi'_{x_1} - z')F_{z'} = 0 \quad \ldots (9)$$

$$F_y + \Psi'_{y_1}F_{z'} = 0 \quad \ldots (10)$$

وهي الشروط الاعتراضيه التي يمكن منها حساب الثوابت الاربعه التي تظهر في الحل العام لمعادلتي اويلر- لاجرانج (1) ، (2) .

ملاحظه:

(١) إذا كانت $A(x_0 , y_0 , z_0)$ تقع على المنحني $y_0 = \phi(x_0)$ ، $z_0 = \Psi(x_0)$ و $B(x_1 , y_1 , z_1)$ تقع على المنحني $y_1 = \phi(x_1)$ ، $z_1 = \Psi(x_1)$. فإن

$$\delta y_0 = \phi'(x_0)\,\delta x_0 \quad , \quad \delta z_0 = \Psi'(x_0)\,\delta x_0$$

$$\delta y_1 = \phi'(x_1)\,\delta x_1 \quad , \quad \delta z_1 = \Psi'(x_1)\,\delta x_1$$

وتصبح الشروط الاعتراضيه كالآتي:

$$F + (\phi - y')\, F_{y'} + (\Psi' - z')\, F_{z'} \Big|_{x = x_0} = 0$$

$$F + (\phi - y')\, F_{y'} + (\Psi' - z')\, F_{z'} \Big|_{x = x_1} = 0$$

(ب) إذا كان $J[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)\ dx$ ، وكانت

$$B(x_1, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}) \ ، \ A(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$$

نقاط متحركه ، فإن الشروط الأعتراضيه هي

$$(F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i})\big|_{x = x_0} \delta x_0 + \sum_{i=1}^{n} F_{y'_i} \Big|_{x=x_0} \delta y_{i_0} = 0$$

$$(F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i})\big|_{x = x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^{n} F_{y'_i} \Big|_{x=x_0} \delta y_{i_1} = 0$$

مثال ٤ -٢ -١

أوجد الشرو الأعتراضيه للدالي

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\ dx$$ ، اذاكان $Z_1 = \phi(x_1, y_1)$

الحل

الشروط الأعتراضيه هي

$$F - y' F_y + (\phi'_x - z') F_{Z'} \big|_{x = x_1} = 0 \Rightarrow 1 + \phi'_{x_1} z' = 0$$

$$(F_y + F_{z'} \phi'_y) \big|_{x = x_1} = 0 \Rightarrow y' + z' \phi'_{y_1} = 0$$

ومنهـا نجـد ان $\frac{1}{\phi'_{x_1}} = \frac{y'}{\phi'_{y_1}} = \frac{z'}{-1}$ وهـي شروط تعامـد منحنـى القيم القصـوى والسطح $Z = \phi(x, y)$.

مثال ٤ -٢ -٢:

اوجد اقل بعد بين السطحين $Z = \phi(x, y)$ ، $Z = \psi(x, y)$.

الحل

بما ان

$$A\,(x_0, y_0, z_0) \quad ، \quad L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\;\; dx$$

تحقق العلاقه $Z_0 = \phi\,(x_0, y_0)$ ، والنقطه $B\,(x_1, y_1, z_1)$ تحقق العلاقه $Z_1 = \psi\,(x_1, y_1)$ ، ومن ثم فان معادلتي اويلر – لاجرانج هما $y'' F_{y'y'} + z'' F_{y'z'} = 0$ ، $y'' F_{y'z'} + z'' F_{z'z'} = 0$ لكن $F_{y'y'}\;\; F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$.

اذاً $y'' = 0$ ، $z'' = 0$ وعليه فان $y = c_1 x + c_2$ ، $z = c_3 x + c_4$ ، وهي تمثل عائله مستقيمات في الفضاء . لكن الشروط الأعتراضيه للدالي L هي شروط تعامد حسب مثال (٤ -٢ -١) ، إذاً يمكن الحصول على القيم القصوى على المستقيمات العموديه على السطح $Z = \phi(x, y)$ عند $A\,(x_0, y_0, z_0)$ ، و العموديه على السطح $Z = \psi\,(x, y)$ عند $B\,(x_1, y_1, z_1)$.

مثال ٤ -٢ -٣

اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي $J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\;\; dx$ ، حيث

$y(0) = 0$ ، $Z(0) = 0$ بينما تتحرك $B\,(x_1, y_1, z_1)$ في المستوى $x = x_1$

الحل

بما ان معادلتي اويلر ـ لاجرانج للدالي $J[y, z]$ هما

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \Rightarrow y'' - z = 0 \qquad \dots (1)$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \Rightarrow z'' - y = 0 \qquad \dots (2)$$

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد ان

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \, Cos\, x \;+\; C_4 \, Sin\, x$$

$$Z = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - C_3 \, Cos\, x - C_4 \, Sin\, x$$

لكن $y(0)=0$ ، $Z(0)=0$ ، اذاً

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_1 + C_2 - C_3 = 0$$

وعليه فان $C_1 + C_2 = 0$ ، وبالتالي فان $C_1 = -C_2$ لكن الشرط الأعتراضي عند نقطه الحدود المتحركه هو

$$\left(F - y' F_{y'} - z' F_{z'}\right)\Big|_{x=x_1} \delta_{x_1} + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta_{y_1} + F_{z'}\Big|_{x=x_1} \delta_{z_1} = 0$$

والنقطه $B(x_1, y_1, z_1)$ تتحرك في المستوى $x = x_1$ ، اذا $\delta_{x_1} = 0$ بينما كل من δ_{y_1} ، δ_{z_1} اختياريه ، وعليه فان $F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0$ و $F_{z'}\Big|_{x=x_1} = 0$.

لكن $F_{y'} = 2y'$ و $F_{z'} = 2z'$ ، إذاً $y'(x_1) = 0$ ، $Z'(x_1) = 0$

وعليه فان

$$C_1 e^{x_1} - C_2 e^{-x_2} - C_3 \, Cos\, x_1 + C_4 \, Sin\, x_1 = 0 \qquad \dots (3)$$

$$C_1 e^{x} - C_2 e^{-x_2} + C_3 \, Cos\, x_1 - C_4 \, Sin\, x_1 = 0 \qquad \dots (4)$$

ويجمع (٣) و (٤) ينتج ان

$$C_1 e^{x_1} - C_2 e^{-x_2} = 0$$

لكن $C_2 = -C_1$ اذاً $C_1\left(e^{x_1} + e^{-x_2}\right) = 0$ ، وعليه فان $C_1 = 0$ ، وبالتالي فان $C_2 = 0$. لكن $C_3 = C_1 + C_2$ ، اذاً $C_3 = 0$ وعليه فان $C_4 \, Cos\, x_1 = 0$.

فإذا كان $Cos\, x_1 \neq 0$ ، فإن $C_4 = 0$ ، وفي هذه الحاله تكون منحنيات القيم القصوى هي المستقيم $Z = 0$ ، $y = 0$.

اما اذا كان $Cos\, x_1 = 0$ ، فإن $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ، حيث n عدد صحيح ، وعليه فان C_4 ثابت اختياري وبالتالي فان منحنيات القيم القصوى هي

$$Z = -C_4 \, Sin\, x \quad ، \quad y = C_4 \, Sin\, x$$

٤ -٣: معادله هاملتون – جاكوبي Hamilton – Jacobi Equation

وفي هذا البند ، سنركز اهتمامنا على اشتقاق معادله هاملتون جاكوبي ، وبعض تطبيقاتها . وللوصول الى هدفنا ، نعتبر ان

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\ dx \qquad \ldots (1)$$

معرفاً على المنحنيات الواقعه في منطقه R ، وان للدالي $J[y]$ قيمه قصوى واحده على المنحنى المار بالنقطتين A,B ، ولنسمي التكامل $S=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\ dx$ والمحسوب على منحنى القيم القصوى الواصل بين $A\ (x_0\,,y_1^0)$ ، $B\ (x_1\,,y_1^1)$ اقصر بعد (geodetic distance) بين A ، B ، فمن الواضح ان S داله وحيده القيمه (single valued function) للإحداثيات A ، B .

مثال ٤ -٣ -١

(أ) اذا كانت J تمثل طول القوس ، فان S تمثل البعد بين A,B .

(ب) اذا كانت $T=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{v}\ dt$ ، $v=v(x,y,z,x',y',z')$

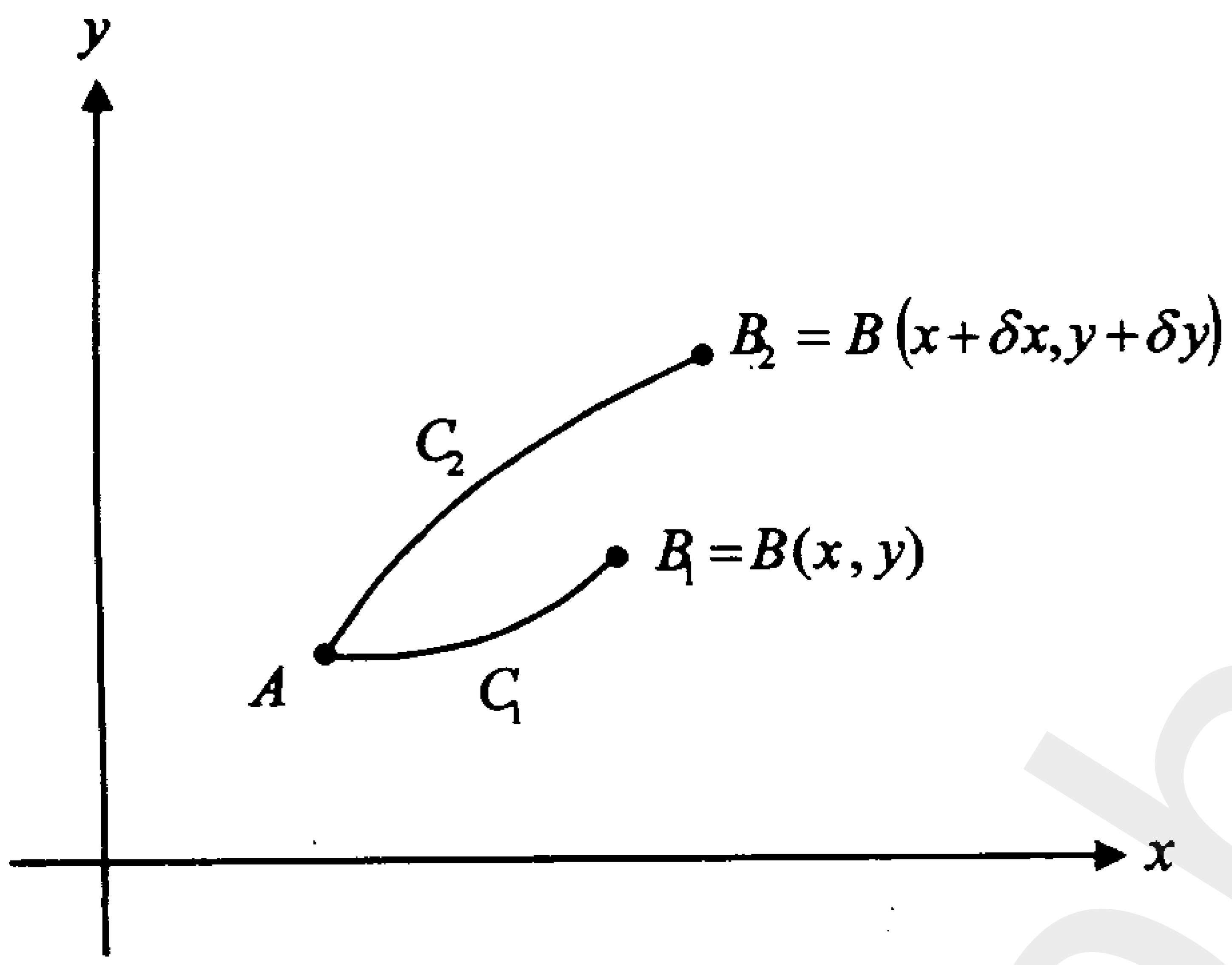
سرعه الجسم عند أي نقطه والتي تعتمد على احداثيات تلك النقطه واتجاهها ، فان S تمثل الزمن الذي يستغرقه الجسم لأنتقال من A الى B .

والآن لنفرض ان $A=(a,y_a)$ نقطه ثابته بينما ، $B=(x,y)$ نقطه متحركه إذا $S=S(x,y)$ داله معتمده على B فقط . ولإيجاد المعادله التفاضليه التي تكون S حلاً لها ، يجب ان نحسب $\frac{\partial S}{\partial x}$ ، $\frac{\partial S}{\partial y}$ من العلاقه :

$$\Delta S=S(x+\delta x,y+\delta y)$$

لكن $\Delta J=J[c_2]-J[c_1]$ ، حيث c_1 هو منحنى القيم القصوى الواصل بين $A=(a,y_a)$ ، $B=(x,y)$ ، اما c_2 فهو منحنى القيم القصوى الواصل بين A ،

$B(x+\delta x, y+\delta y)$ ، شـــــكل (٤ -٥) . اذاً $ds = \delta J$. لكـــــن $\delta J = P\delta y - H\delta x \Big|_{x=a}^{x=b}$ ، حسب العلاقه (5) في بند (٤ -١ -٢) ، حيث H داله هاملتون .



شكل (٤ -٥)

اذاً

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H \quad , \frac{\partial S}{\partial y} = P \qquad \dots (1)$$

حيث $P = P(x, y) = F_{y'}$ ، $H = H(x, y, p(x, y)) = P_{y'} - F$ ومن (١)نجد ان S يجب ان تحقق العلاقه الآتيه :

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0 \qquad \dots (2)$$

والتي يطلق عليها معادله هاملتون – جاكوبي .

والآن الى المبرهنات الآتيه

<u>**مبرهنه ٤ -٣ -١**</u>

اذا كانت $S = S(x, y, \alpha)$ حلاً لمعادله هاملتون –جاكوبي ، حيث α

ثابت التكامل عند الحل ، فان $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ ثابت على كل المنحنيات الحرجه (منحنيات القيم القصوى) ، $y = y(x)$ للدالي $J[y]$.

البرهان

يكفي ان نثبت ان $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = 0$ ، ولإثبات ذلك ، لاحظ ان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \ldots (3)$$

لكن تفاضل طرف (2) بالنسبه للوسيط α هو

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} = -\frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \qquad \ldots (4)$$

إذاً من (3) ، (4) نجد ان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\partial H}{\partial P}\right)$$

لكن $\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{dy}{dx}$ ، اذاً $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = 0$ ، وعليه فأن $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$ ، حيث β ثابت .

□

مبرهنه ٤ -٣ -٢ " مبرهنه جاكوبي "

إذاكان $S = S(x, y, \alpha)$ حلاً لمعادله هاملتون – جاكوبي ، وكان $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \neq 0$ ، فان $y = y(x, \alpha, \beta)$ ، حيث β ثابت معرف بالعلاقه $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$ ، $P = \frac{\partial S}{\partial y}$ حل عام للنظام القانوني

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad ، \quad \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{dy}{dx}$$

البرهان

بما ان $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} \cdot \frac{dy}{dx}$ ، $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \neq 0$ ، $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = 0$

حسب مبرهنه (٤ -٣ -١) .

اذاً $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial H}{\partial P}$. لكن $\frac{\partial S}{\partial y}=P$ ، إذاً

$$\frac{dP}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 S}{\partial^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial P} \qquad \ldots (5)$$

لكن $0 = \frac{\partial S}{\partial x}+H(x,y,\frac{\partial S}{\partial y})$ ، إذاً بالتفاضل بالنسبه الى y ، نجد ان

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} = \frac{-\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial P}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \qquad \ldots (6)$$

ومن (5) ، (6) نجد ان

$$\frac{dP}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y}$$

□

ملاحظه:

إذا كان

$$S=S(x,y_1,\cdots,y_n) \quad ، \quad J[y_1,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\,dx$$

فإن معادله هاملتون – جاكوبي هي

$$\frac{\partial S}{\partial x}+H(x,y_1,\cdots,y_n,\frac{\partial S}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial y_n}) = 0$$

$$P_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad ، \quad y_i'=\frac{\partial H}{\partial P_i} \quad ، \quad P_i=F_{y_i'} \quad ، \quad \frac{\partial S}{\partial y_i}=P_i \quad ، \quad \frac{\partial S}{\partial x}=-H$$

مثال ٤ -٣ -١

حل معادله هاملتون – جاكوبي المناظرة للدالي

$$J[y] = \int_a^b y'^2 \quad dx$$

الحل

بما أن $F(x,y,y') = y'^2$ ، $P = F_{y'} = 2y'$ ، إذاً داله هاملتون هي

$$H(x,y,p) = Py' - F = \frac{1}{2}P^2 - \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P^2$$

وعليه فإن معادله هاملتون – جاكوبي هي

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{4}(\frac{\partial S}{\partial y})^2 = 0$$

وهي معادله تفاضليه جزئيه غير متجانسه من الرتبه الأولى ، ولحلها نفرض أن : $S = u(x) + v(y)$ ، إذاً $\frac{du}{dx} + \frac{1}{4}(\frac{dv}{dy})^2 = 0$ ، وعليــه فــإن ، $\frac{du}{dx} = c$ ، لأن $\frac{du}{dx}$ لا تعتمـد علـى y و $(\frac{dv}{dy})^2$ لا يعتمـد علـى x . إذاً $u = -\alpha^2 x$ ، حيـث α ثابـت ، وعليـه فـإن $-\alpha^2 + \frac{1}{4}(\frac{dv}{dx})^2 = 0$ ، وبالتـالي فـإن ، $\frac{dv}{dy} = 2\alpha$ ، وعليـه فـإن $v = 2\alpha y + \beta$ ، إذاً $S = -\alpha^2 x + 2\alpha y + \beta$ حـل لمعادلـه هـاملتون جـاكوبي .

لكن من مبرهنه (٤ -٣ -١) ، نجد أن $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = K$ ، إذاً $y = \alpha x + a$ ، $\frac{\partial S}{\partial \beta} = K_1$

وعليه فإن منحنى القيم القصوى هي خط مستقيم .

مثال ٤ -٣ -٢ :

اوجد معادله اقصر مسار على سطح فيه

$$dS = \sqrt{[\phi_1(x) + \phi_2(y)]\,(dx^2 + dy^2)}$$

الحل :

بما أن

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{[\phi_1(x) + \phi_2(y)] \quad (1 + y'^2)}\ dx$$

إذاً

$$H = \frac{\sqrt{\phi_1(x) + \phi_2(4)}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\phi_1(x) + \phi_2(y)}\ ,\ \sqrt{1 - P^2}$$

حيث

$$H^2 + P^2 = \phi_1(x) + \phi_2(y) \quad ، \quad P = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

وعليه فإن معادله هاملتون – جاكوبي هي

$$(\frac{\partial P}{\partial x})^2 - \phi_1(x) = \phi_2(y) - (\frac{\partial P}{\partial y})^2 \quad \text{أو} \quad (\frac{\partial P}{\partial x})^2 + (\frac{\partial P}{\partial y})^2 = \phi_1(x) + \phi^2(y)$$

وهي معادله تفاضليه جزئيهه ذات متغيرات منفصله ، وعند وضع

$$\phi_2(y) - (\frac{\partial P}{\partial y})^2 = \alpha \quad ، \quad (\frac{\partial P}{\partial x})^2 - \phi_1(x) = \alpha$$

نجد أن

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sqrt{\phi_2(y) - \alpha} \quad ، \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \sqrt{\phi_1(x) + \alpha}$$

وعليه فإن

$$P = \int \sqrt{\phi_1(x) + \alpha}\ dx + \int \sqrt{\phi_2(y) - \alpha}\ dy$$

إذاً معادله اقصر مسار هو المستقيم $\frac{\partial P}{\partial x} = \beta$ على الشكل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\phi_1(x) + \alpha}} - \int \frac{dy}{\sqrt{\phi_2(y) - \alpha}} = \beta$$

مثال ٤ -٣ -٣

اوجد معادله هاملتون – جاكوبي للدالي

$$J[y,z] = \int_a^b (y'^2 + z'^2 - 2cz)\ dx$$

الحل

بما أن معادله هاملتون – جاكوبي للدالي $J[y,z]$ هي

$$H(x,y,z,P_1,P_2) = P_1 y' + P_2 z' - F(x,y,z,y',z') \quad ، \quad \frac{\partial \delta}{\partial x} + H(x,y,z,P_1,P_2) = 0$$

$$P_2 = F_{z'} \quad ، \quad P_1 = F_{y'} \quad ، \quad F = y'^2 + z^2 - 2cz$$

إذاً $P_2 = 2z'$ ، $P_1 = 2z'$ ،

وعليه فإن $H = y'^2 + z'^2 + 2cz = \frac{1}{4}P_1^2 + \frac{1}{4}P_2^2 + 2cz$

لكن $P_2' = -\frac{\partial H}{\partial z} = -2c$ ، $P_1' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$ ،

إذاً $P_2 = 2A - 2cx$ ، $P_1 = 2B$

حيث A , B ثوابت . وحيث ان $z' = \frac{1}{2}P_2$ ، $y' = \frac{1}{2}P_1 = B$ ،

إذاً $y = Bx$ ، $z' = A - cx$ ، وعليه فإن $z = Ax - \frac{1}{2}cx^2$

وبالتالي فإن $H = B^2 + (A - cx)^2 + 2c(Ax - \frac{1}{2}cx^2) = A^2 + B^2 = \alpha$

وعليه فإن معادله هاملتون – جاكوبي هي

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} + \alpha = 0$$

٤ – ٤ : منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنيه

Extremals With Corners

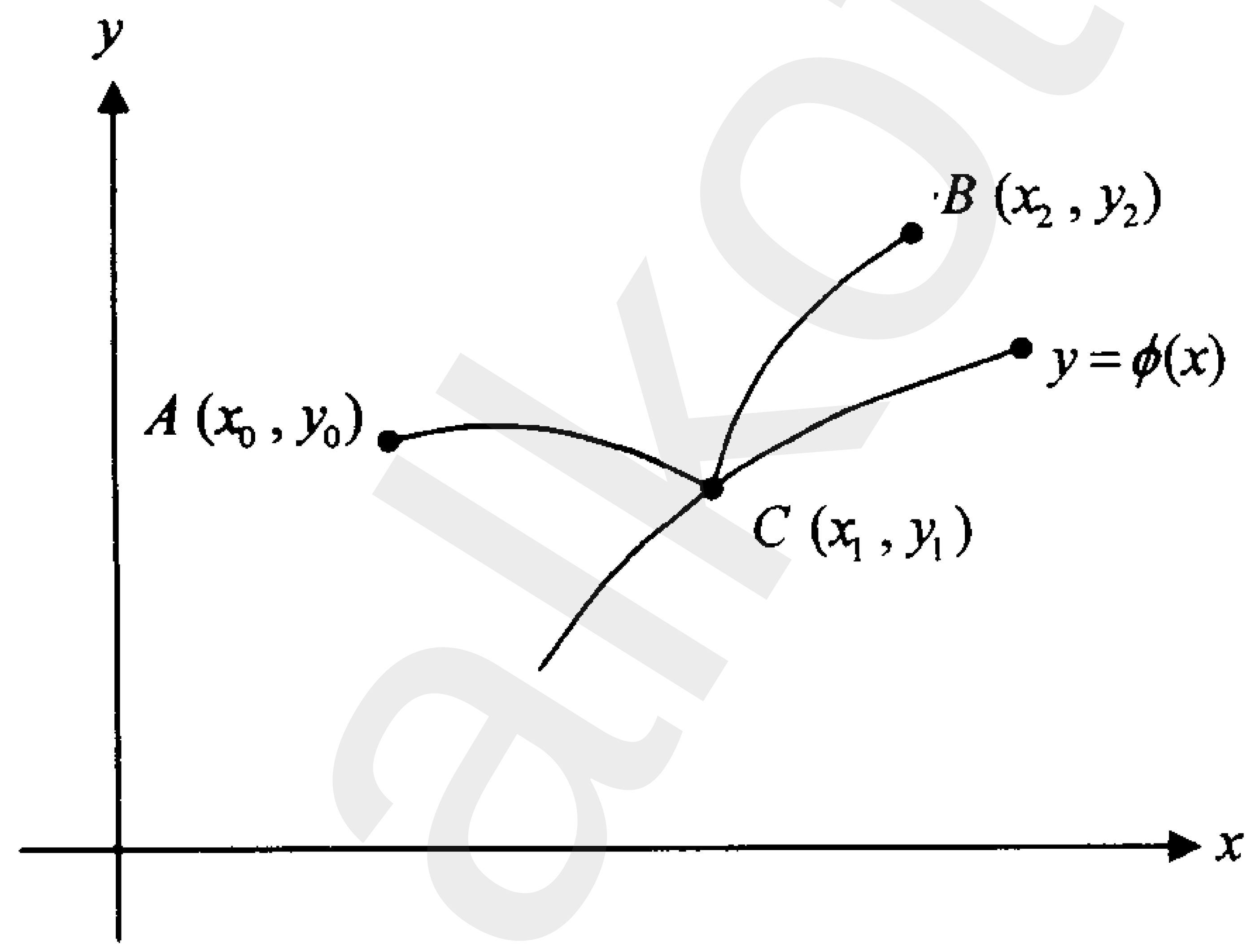
تعاملنا في الفصول السابقه مع مسائل التغيرات التي تكون منحنيات قيمها القصوى متصله (مستمره) وذات مشتقه متصله أيضاً ، وحيث ان لكثير من مسائل التغيرات منحنيات قيم قصوى ليست متصله عند بعض النقاط ، والتي يطلق عليها نقاط ركنيه ، فقد خُصص هذا البند لدراسه هذا النوع من مسائل التغيرات ، والذي يضم ثلاثه أجزاء تناولنا في الأول منها مسأله انعكاس منحنيات القيم القصوى ، وتناولنا في الثاني مسأله انكسار منحنيات القيم القصوى والتي تعتبر تعميماً للمسائل التي تهتم بدراسة انعكاس أو انكسار الضوء ، وتناولنا في الجزء الثالث الشروط التي يجب أن تحققها الحلول ذات النقاط الركنيه .

٤ -٤ -١ :انعكاس منحنيات القيم القصوى Reflection of Extremals

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة منحنيات القيم القصوى للداليات ، والتي تمر بنقطة مثل A ، وتمر بالنقطه B بعد انعكاسها عند نقطة مثل C واقعه على منحنى معلوم .

ولإيجاد منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ للدالي $J[y] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx$ والذي يمر بالنقطه $A(x_0, y_0)$ ، ويمر في $B(x_2, y_2)$ بعد انعكاس عند النقطه $C(x_1, y_1)$ الواقعه على المنحنى $y = \phi(x)$ ، انظر شكل (٤ -٦) . لاحظ أن نقطة الانعكاس $C(x_1, y_1)$ هي نقطه ركنيه "نقطة تكون عندها المشتقه الأولى غير متصله" لمنحنى القيم القصوى $y(x)$ ، إذاً المشتقين اليمنى واليسرى للداله $y(x)$ عندها مختلفتان ، أي أن $y'(x_1^-) \neq y'(x_1^+)$ ، ومن ثم فإنه من المناسب أن نعبر عن $J[y]$ كالأتي

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$



شكل (٤ -٦)

إذاً $y'(x)$ متصله على كل من الفترتين $[x_0, x_1]$ ، $[x_1, x_2]$ ، وبالتالي فإن

$$\delta J = \delta\left(\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\ dx\right) + \delta\left(\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\ dx\right)$$

وحيـث أن النقطـه $C_1(x_1,y_1)$ يمكـن أن تتحـرك علـى المنحنـى $y=\phi(x)$ ، إذاً حساب الـتغير لكـل مـن $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ ، $\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ يقـع ضـمن شـروط مسأله الـتغيرات ذات نقـاط الأطـراف المتحـركـة ، ومـن ثـم يمكـن اسـتخدام نتـائج البندين الأول والثاني في هذا الفصل . وحيـث أن كـلاً مـن المنحـنيين BC ، AC هـو منحنى قيم قصوى ، إذاً كـل منهمـا يمثـل حـلاً لمعادلـه اويلـر – لاجـرانج الناتجـه ، وإذا فرضنا أن احد المنحنيين معلوم بينما الأخر متغير ، تحولت المسأله إلى إيجاد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\ dx \quad \text{أو} \quad J_2[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\ dx$$

بنقاط أطراف ثابته ، وعليه فإن

$$\delta J_1 = [F + (\phi' - y')F_{y'}]_{x=x_1^-}\, \delta x_1 \qquad \dots (1)$$

$$\delta J_2 = [F + (\phi' - y')F_{y'}]_{x=x_1^+}\, \delta x_1 \qquad \dots (2)$$

حيـث $x=x_1^-$ ، $x=x_1^+$ يعـني اخـذ النهايـه اليسـرى والنهايـه اليمنـى علـى الترتيـب عنـدما تـؤول x إلى x_1 . لكن المشتقه y' ليسـت متصـله عنـد C ، إذا كـان $\delta J = 0$ يعني أن

$$F + (\phi' - y')F_{y'}|_{x=x_1^-}\, \delta x_1 = F + (\phi' - y')F_{y'}|_{x=x_1^+}\, \delta x_1$$

وحيث أن δx_1 اختياريه ، إذاً

$$F + (\phi' - y')F_{y'}\Big|_{x=x_1^-} = F + (\phi' - y')F_{y'}\Big|_{x=x_1^+} \qquad \dots (3)$$

أو

$$F(x_1,y_1,y'(x_1^-)) + [\phi'(x_1) - y'(x_1^-)]\ F_{y'}(x_1,y_1,y'(x_1^-))$$
$$= F(x_1,y_1,y'(x_1^+)) + [\phi'(x_1) - y'(x_1^+)]\ F_{y'}(x_1,y_1,y'(x_1^+))$$

والذي يطلق عليه شرط الانعكاس (Reflection Condition)

مثال ٤ -٤ -١

اوجد شرط الانعكاس للدالي

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_2} A(x,y)\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

الحل

بما أن

$$F(x,y,y')=A(x,y)\cdot\sqrt{1+y'^2}$$

إذاً شرط الانعكاس (3) يأخذ الشكل

$$A(x_1,y_1)[\sqrt{1+y'^2}+(\phi'-y')\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}]|_{x=x_1^-}=A(x_1,y_1)[\sqrt{1+y'^2}+(\phi'-y'\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}]|_{x=x_1^+}$$

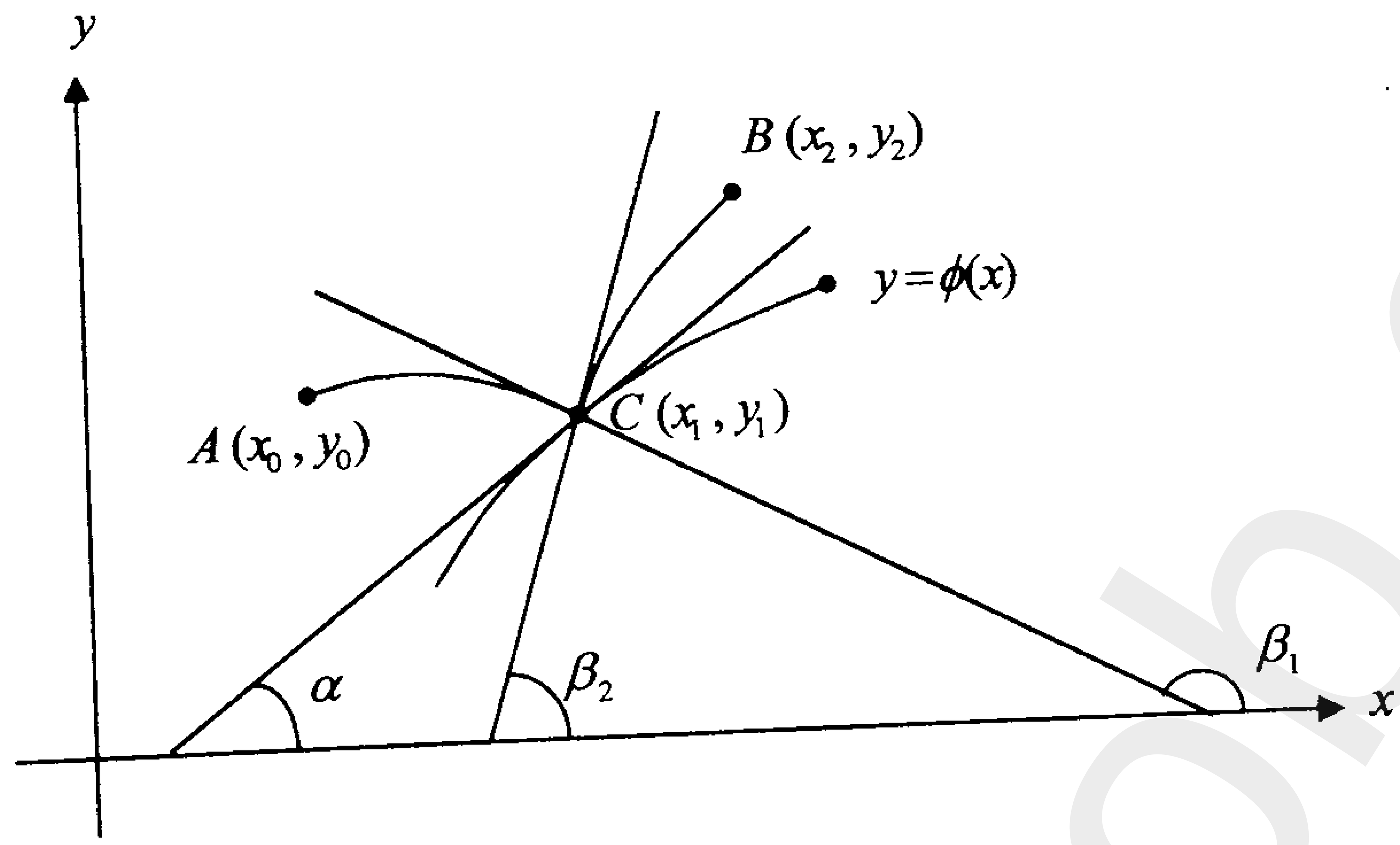
وإذا كانت $A(x_1,y_1)\neq 0$ ،

فإن

$$\frac{1+\phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}|_{x=x_1^-}=\frac{1+\phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}|_{x=x_1^+}$$

وإذا رمز للزاويه المحصوره بين المماس للمنحنى $y=\phi(x)$ عند النقطه C وبين محور السينات بالرمز α . بينما ميل المماس لكل من المنحنيين AC ، CB عند النقطه C هو $\tan\beta_1$ ، $\tan\beta_2$ على الترتيب . انظر الشكل (٤ -٧) ، نجد أن ،

$$\phi'(x_1)=\tan\alpha \quad ، \quad y'(x_1^-)=\tan\beta_1 \quad ، \quad y'(x_1^+)=\tan\beta_2$$



شكل (٤ -٧)

وبالتالي فإن شرط الانعكاس عند نقطة الانعكاس C ، يأخذ الشكل

$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta_1}{-\sec\beta_1}=\frac{1+\tan\alpha\ \tan\beta_1}{\sec\beta_2}$$

وبعد إجراء عملية التبسيط والضرب في $Cos\,\alpha$ نحصل على :

$$-Cos\ (\alpha-\beta_1)\ =\ Cos\ (\alpha-\beta_2)$$

ومنها نجد أن زاوية السقوط = زاوية الانعكاس .

ملاحظه

إذا كانت نقطة تتحرك بسرعة $v(x, y)$ فإن الزمن الذي تستغرق هذه النقطه للانتقال من الموضوع $A(x_0 y_0)$ إلى الموضع $B(x_1 y_1)$ هو قيمة التكامل

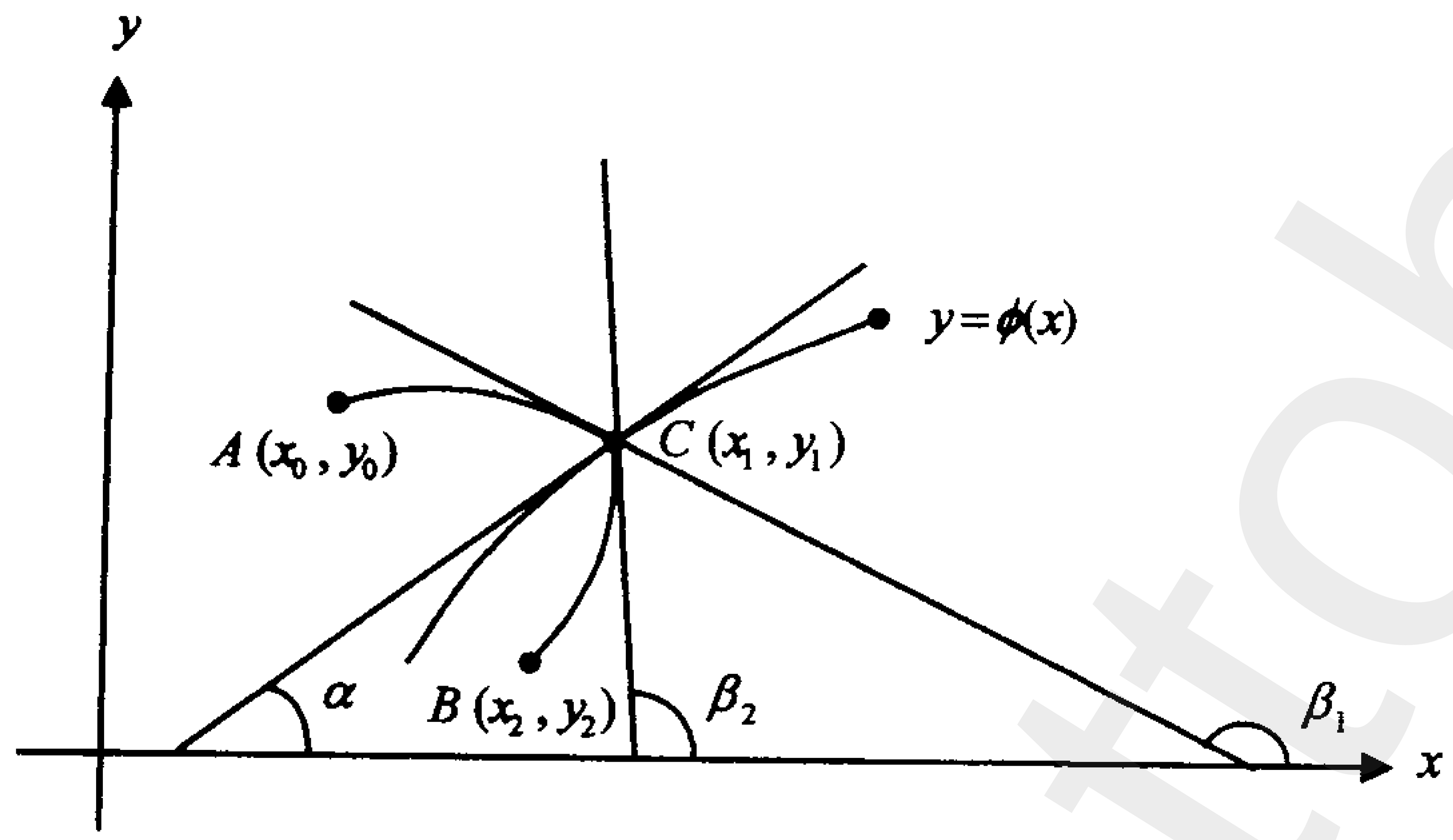
$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{v(x,y)}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

وهذا التكامل ينتمي إلى مجموعة الداليات التي على الصوره :

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\ dx$$

٤ -٤ -٢: انكسار منحنيات القيم القصوى "Refraction of Extremals"

ليكن $J[y]=\int_{x_0}^{x_2} F(x,y,y')\ dx$ ، ولنفرض ان للداله $F(x,y,y')$ منحنى غير متصل $y=\phi(x)$ ، وان النقاط $A(x_0,y_0)$ ، $B(x_2,y_2)$ تقع على جانبي هذا المنحنى الغير متصل . انظر الشكل (٤ -٨) .



شكل (٤ -٨)

إذاً
$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x,y,y')\ dx + \int_{x_1}^{x_2} F_2(x,y,y')\ dx$$

حيث $F_1(x,y,y')=F(x,y,y')$ على إحدى جانبي المنحنى $y=\phi(x)$

بينما $F_2(x,y,y')=F(x,y,y')$ على الجانب الآخر للمنحنى $y=\phi(x)$

ولنفرض أن كل من F_2 ، F_1 هي داله قابلة للتفاضل ثلاث مرات . ومن الطبيعي أن نتوقع أن هناك نقطة ركنيه عند النقطه $c(x_1,y_1)$ وهي نقطة تقاطع المنحنى $y=y(x)$ مع $y=\phi(x)$. كما نلاحظ أن كلاً من المنحنى (القوس) CB ، AC هو منحنى قيم قصوى " وهذا واضح من حقيقة اعتبار إحدى

هذه الأقواس ثابت وتغيير الآخر للحصول على مسأله تغيرات ذات نقط أطراف ثابتة " ولهذا السبب فبالنسبه إلى منحنيات المقارنة فإنه يمكننا ان نأخذ منحنى يتكون من قوسين من منحنيات القيم القصوى . وبالتالي فإن التغير (مع ملاحظة أن النقطه قابلة للحركة على المنحنى $y=\phi(x)$) يكون

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_1} F_1(x,y,y')\ dx \ + \ \delta \int_{x_1}^{x_2} F_2(x,y,y')\ dx$$
$$= [F_1 + (\phi' - y')F_{1y'}]|_{x=x_1^-}\ \delta x_1 - [F_2 + (\phi' - y')F_{2y'}]|_{x=x_1^+}\ \delta x_1$$

والشرط الضروري لوجود منحنيات قيم قصوى $\delta J = 0$ يؤدي إلى الآتي :

$$[F_1 + (\phi' - y')F_{1y'}]|_{x=x_1^-} = [F_2 + (\phi' - y')F_{2y'}]|_{x=x_1^+}$$

وهذا هو شرط الانكسار (The refraction Condition) وحيث ان y' غير متصله عند نقطة الانكسار فإن هذا الشرط يمكن كتابته كما يلي :

$$F_1(x,y,y'(x_1^-)) + [\phi'(x_1) - y'(x_1^-)]\ F_{1y'}(x_1,y_1,y'(x_1^-)) =$$
$$= F_2(x,y,y'(x_1^+)) + (\phi'(x_1) - y'(x_1^+))\ F_{2y'}(x_1,y_1,y'(x_1^+))$$

كما أن شرط الانكسار بالإضافه إلى المعادله $y_1=\phi(x_1)$ قد يساعدنا في تعيين إحداثيات النقطه C .

<u>مثال ٤ -٤ -٢</u>

اوجد شروط الانكسار للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\ dx$$

<u>الحل</u>

نفرض أن $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A_1(x,y)\sqrt{1+y'^2}\ dx + \int_{x_1}^{x_2} A_2(x,y)\cdot\sqrt{1+y'^2}\ dx$

إذاً شرط الانكسار

$$A_1(x,y)\cdot\frac{1+\phi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1^-} = A_2(x,y)\,\frac{1+\phi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1^+} \qquad \dots\ (1)$$

ومما سبق ، نجد أن $y'(x_1^+) = \tan\beta_2$ ، $y'(x_1^-) = \tan\beta_1$ ، $\phi'(x_1) = \tan\alpha$

وبالتالي فإن المعادله (1) بعد عمليه التبسيط والضرب في $Cos\alpha$ تتحول إلى :

$$A_1(x_1,y_1)\cdot Cos(\alpha-\beta_1) = A_2(x_1,y_1)\ Cos(\alpha-\beta_2)$$

وعليه فإن

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)} = \frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)} \quad \text{أو} \quad \frac{Sin[\frac{\pi}{2}-(\alpha,\beta_1)]}{Sin[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)]} = \frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)}$$

والذي يعتبر تعميماً للقانون المشهور الخاص بانكسار الضوء والذي ينص على أن "النسبة بين جيب زاوية السقوط وجيب زاوية الانكسار تساوي النسبة بين السرعات ، $v_1(x,y) = \frac{1}{A_1(x,y)}$ ، $v_2(x,y) = \frac{1}{A_2(x,y)}$ ، في الوسطين وعند الحدود التي يحدث عندها الانكسار" .

٤ -٤- ٣ : الشروط الركنيه Corners Conditions

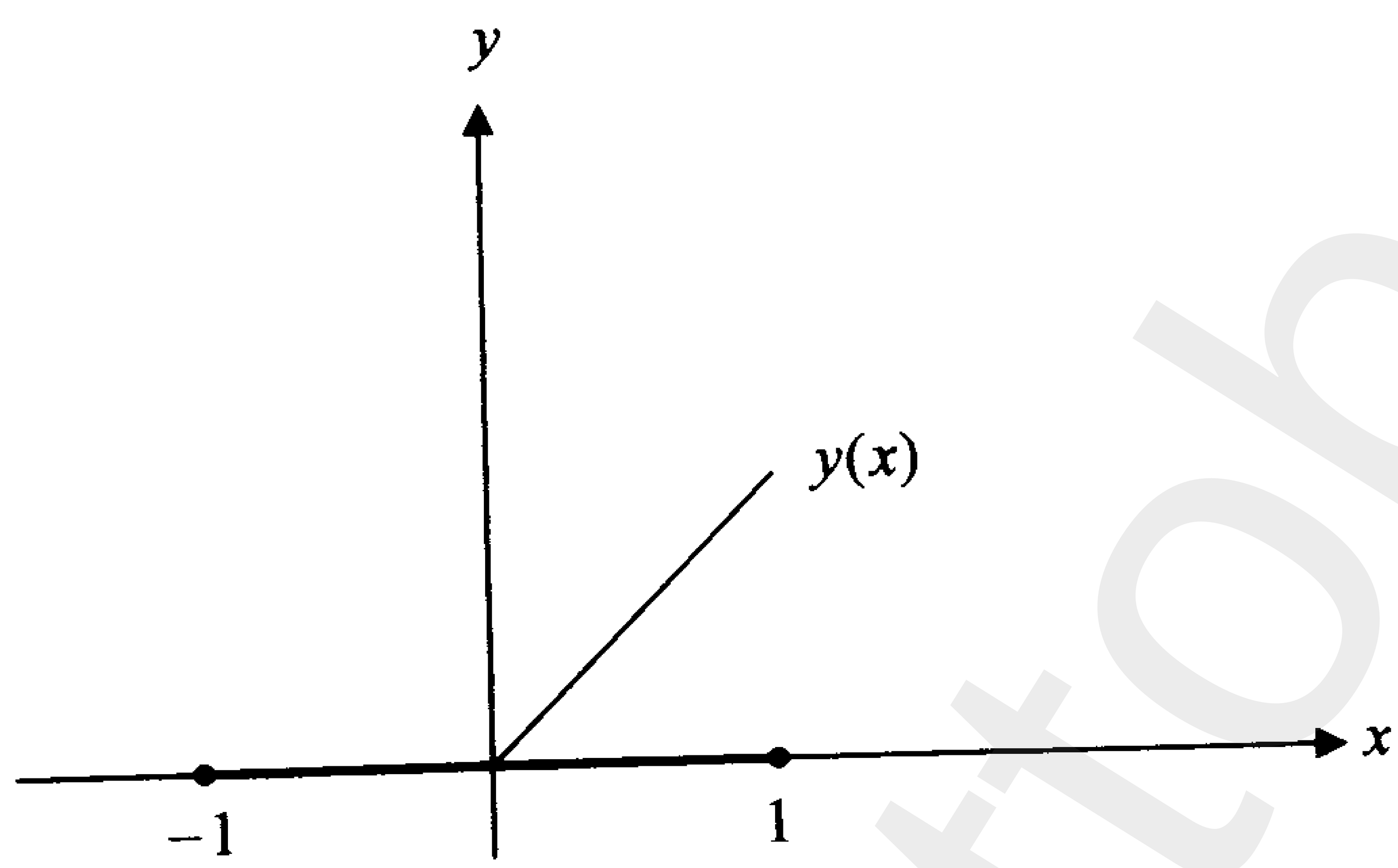
قد يكون لمسأله تغيرات قيم قصوى على منحنيات ذات نقاط ركنيه ، لكنها ليست نقاط انعكاس أو انكسار ، فمثلاً إذا كان

$$y(1) = 1 \ ،\ y(-1) = 0 \ ،\ J[y] = \int_{-1}^{1} y^2(1-y')^2\,dx$$

فإن $J[y]\geq 0$ ، ومن الواضح أن اصغر قيمة للدالي J هي الصفر والتي يمكن الوصول إليها عندما $y=0$ أو $y'=1$ ، أي أن $y=0$ أو $y=x+c$ ، لكن $y(-1)=0$ ، $y(1)=1$ يعني أن $c=0$ ، وعليه فإن $y=0$ أو $y=x$ ، وهذا يعني أن للدالي J قيمة صغرى على المنحنى

$$y = y(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

إذاً $y'(x)$ ليست متصله عند $x = 0$ ، وعليه فإن $x = 0$ نقطة ركنيه شكل (٤ -٩)



شكل (٤ -٩)

إذاً توجد مسائل تغيرات قيم قصوى على منحنيات ذات نقاط ركنيه ويطلق على مثل تلك المنحنيات المنحنيات الممهدة جزئياً أو مقطعياً "Piecewise smooth curves" ، وبصورة عامة ، يقال عن منحنى أو داله إنه ممهد جزئياً في $I = [a, b]$ ، إذا كان $y(x)$ متصل على I ، و $y'(x)$ ليست متصله عند عدد محدود من نقاط I .

ولإيجاد الشروط التي يجب أن تتحقق في الحلول ذات النقاط الركنيه لمسائل القيم القصوى للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') \; dx$$

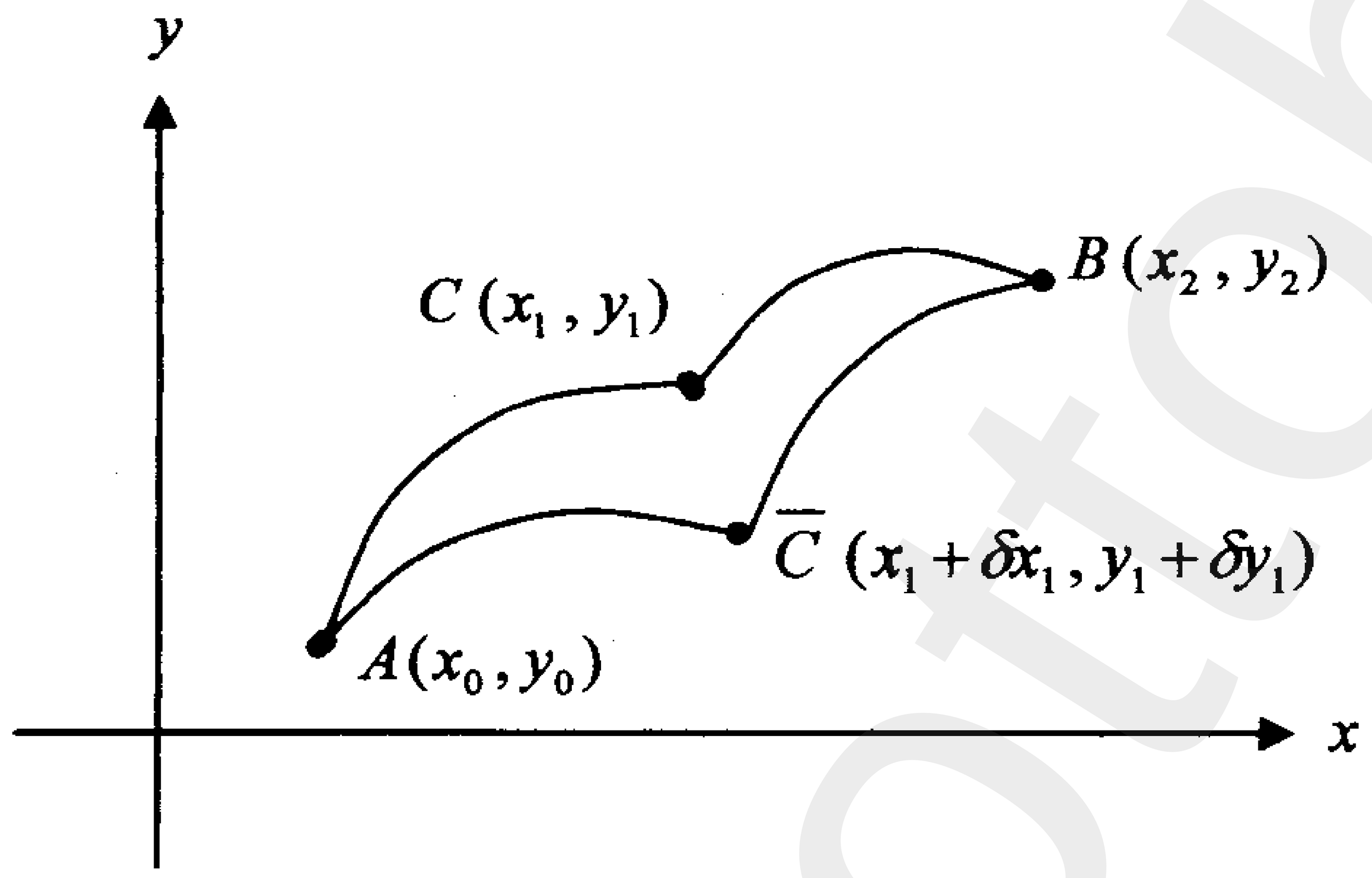
لاحظ أن المنحنيات المهده جزئياً والتي تعتبر خط قيم قصوى منكسر ، يجب أن تمثل حلولاً لمعادله اويلر – لاجرانج ، ويتضح ذلك من حقيقه انه إذا كانت كل الأجزاء (ما عدا واحد فقط) من هذا الخط المنكسر ثابته ، تحولت المساله إلى

مسأله بسيطه ذات نقاط أطراف ثابته ، ومن ثم فإن الجزء الغير ثابت يجب أن يكون قوساً من منحنى القيم القصوى .

وإذا فرضنا أن لمنحنى القيم القصوى نقطه ركنيه واحدة وهذا لغرض التبسيط ، "لأنه إذا كان للمنحنى أكثر من نقطه ركنيه ، فيمكن استخدام نفس الطريقه لكل نقطة ركنيه" ، فإن الشروط التي يجب أن تتحقق عند النقطه الركنيه يمكن استنتاجها كالأتي .

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\ dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\ dx$$

حيث x_1 هي الأحداثي السيني للنقطة الركنيه . انظر الشكل (٤ -١٠)



شكل (٤ -١٠)

وحيث أن كلاً من CB ، AC هو حل لمعادله اويلر – لاجرانج وأن C تتحرك بطريقة اختيارية ، إذاً

$$\delta J = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1^-} \cdot \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1^-} \cdot \delta y_1 - (F - y'F_{y'})|_{x=x_1^+} \cdot \delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_1^+} \delta y_1 \cdot$$

لكن δy_1 ، δy_2 مستقلة عن بعضهما ، إذاً

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1^-} = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1^+} \qquad \dots (1)$$

$$F_{y'}|_{x=x_1^-} = F_{y'}|_{x=x_1^+} \qquad \dots (2)$$

وهذه هي الشروط المطلوبة والتي يطلق عليها الشروط الركنيه أو شروط اردمان – فيشتراس (Erdmann – weierstrass) كما ان هذه الشروط بالأضافه إلى شروط الاتصال لمنحنيات القيم القصوى قد تمكننا من تعيين إحداثيات النقطه الركنيه .

مثال ٤ -٤ -٣

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقط الركنيه (إن وجدت) للدالي

$$J[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2) \quad dx$$

الحل

بما أن $F_{y'}|_{x=x_1^-} = F_{y'}|_{x=x_1^+}$ ، إذاً $y'(x_1^-) = y'(x_1^+)$ ،

وعليه فإن المشتقه $y'(x)$ متصله عند $x = x_1$ ، وبالتالي فانه لا يوجد نقاط انعكاس أو انكسار ، وعليه فان منحنيات القيم القصوى هي منحنيات ممهده (smooth curve)

smooth

مثال٤ -٤ -٤

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقط الركنيه (إن وجدت) للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} y'^2 (1 - y')^2 \quad dx$$

الحل

بما أن $F = y'^2 (1 - y')^2 = F(y')$.

إذاً منحنيات القيم القصوى هي عبارة عن خطوط مستقيمة

$$y = cx + b \cdot$$

وبالنسبة إلى هذا الدالي . فإن الشروط عند النقطه الركنيه تأخذ الشكل :

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1^-} = -y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1^+} \quad \dots (1)$$

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1^-} = 2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1^+} \quad \dots (2)$$

وإذا فرضنا أن $y'(x_1^-)=\alpha$ ، $y'(x_1^+)=\beta$ **، وعوضنا في (1) ، (2) لوجدنا أن**

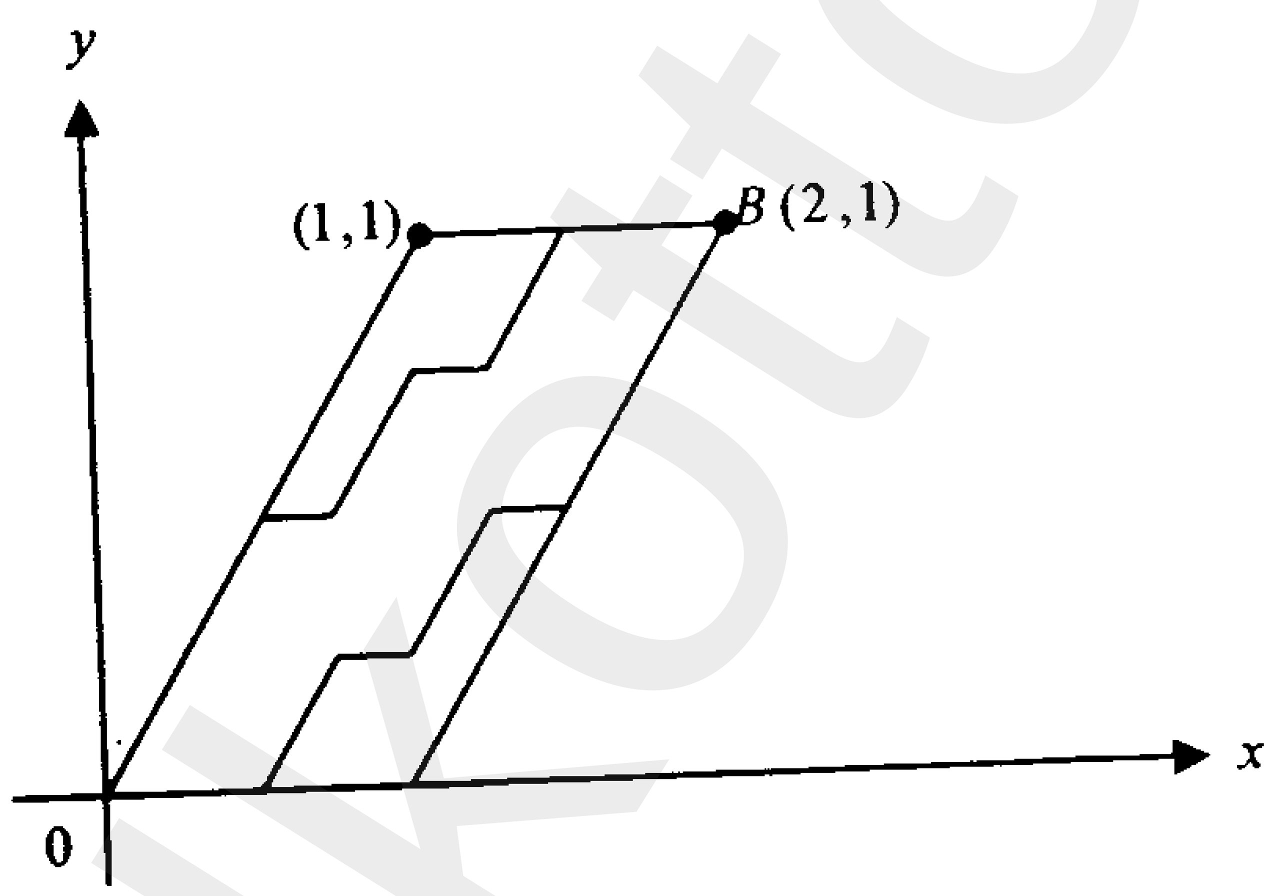
$$\alpha^2(1-\alpha)(1-3\alpha) = \beta^2(1-\beta)(1-3\beta) \quad \dots (3)$$

$$\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha) = \beta(1-\beta)(1-2\beta) \quad \dots (4)$$

وبحل المعادلتين (3) ، (4) مع الغرض $\alpha \neq \beta$ **لوجدنا أن**

$$\alpha=0 \;،\; b=1 \quad \text{أو} \quad \alpha=1 \;،\; b=0$$

وعليه فإن منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنيه تتكون من أجزاء من الخطوط المستقيمة التي تنتمي إلى العائلات $y=c_1$ ، $y=x+c_2$ **حيث** c_1,c_2 **ثوابت ، انظر شكل (٤ -١١)**



شكل (٤ -١١)

<u>مثال ٤ -٤ -٥</u> :

اوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنيه (إن وجدت) للدالي

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 + y'^3)\, dx$$

الحل

بما أن $F = y'^2 + y'^3$ ، إذاً $F_{y'} = 2y' + 3y'^2$

وعليه فإن
$$F - y'^2 F_{y'} = -(y'^2 + 2y'^3)$$

ولمعرفة وجود نقاط ركنيه ، نطبق شروط ايردمان – فيرشتراس ،

$$F - y'F_{y'}\big|_{x=x_1^-} = F - y'F_{y'}\big|_{x=x_1^+} \quad ، \quad F_{y'}\big|_{x=x_1^-} = F_{y'}\big|_{x=x_1^+}$$

فنجد أن

$$y'^2 + 2y'^3\big|_{x=x_1^-} = y'^2 + 2y'^3\big|_{x=x_1^+} \qquad \ldots (1)$$

$$2y' + 3y'^2\big|_{x=x_1^-} = 2y' + 3y'^2\big|_{x=x_1^+} \qquad \ldots (2)$$

ونفرض أن $y'(x_1-) = \alpha$ ، $y'(x'+) = \beta$ والتعويض في (1) ، (2) ، نجد أن

$$\alpha^2 + 2\alpha^3 = \beta^2 + 2\beta^3 \qquad \ldots (3)$$

$$2\alpha + 3\alpha^2 = 2\beta + 3\beta^2 \qquad \ldots (4)$$

وبحل المعادلتين (3) ، (4) نجد أن $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{3}$

وعليه لا توجد نقاط ركنيه . أما منحنيات التوقف لذلك الدالي فهي عائله خطوط مستقيمه .

تمارين

(١) اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$J[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\,dx \quad ، \quad y(0) = 0 \quad ،$$

بينما تتحرك $B(x_1, y_1)$ على المنحنى $(x-9)^2 + y^2 = 9$

(٢) اوجد الشروط الأعتراضيه للدالي

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} A(x,y)e^{\tan^{-1}(y')}\,dx \quad , \quad A(x,y)\neq 0$$

(٣) اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$y(0)=0 \quad ، \quad J[y]=\int_0^{\pi/4}(y^2-y'^2)\,dx$$

بينما تتحرك $(\frac{\pi}{4}, y(\frac{\pi}{4}))$ على المستقيم $x=\frac{\pi}{4}$

(٤) اوجد منحنى القيم القصوى للدالي

$$y(0)=y'(0)=0 \quad ، \quad J[y]=\int_0^1 (y''^2-2xy)dx$$

$y(1)=\frac{1}{120}$ ، بينما $y'(1)$ ليست معطاة .

(٥) اوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنيه (إن وجدت) لكل مما يأتي

(ا) $J[y]=\int_0^4 (y'-1)^2(y'+1)^2\,dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(4)=2$

(ب) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2xy-y^2)dx$ ، $y(x_0)=y_0$ ، $y(x_1)=y_1$

(ج) $J[y]=\int_0^2 y^2(1-y')^2\,dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(2)=1$

(د) $J[y]=\int_0^{x_1}(y'^4-by'^2)dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(x_1)=y_1$

(هـ) $J[y]=\int_a^b y^2\cdot(1+y'^2)dx$

(و) $J[y]=\int_a^b y^n\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ، $n>0$

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 - 1)^2 \, dx \quad \text{(ز)}$$

$$J[y] = \int_a^b x^2 y'^2 \, dx \quad \text{(ح)}$$

(٦) اوجـد باسـتخدام معادلـه هـاملتون – جـاكوبي ، منحنيـات القـيم القصـوى للدالي :

$$J[y] = \int \sqrt{(x^2 + y^2)(1 + y'^2)} \, dx$$

(٧) حل معادله هاملتون – جاكوبي المصاحبه للدالي

$$J[y] = \int_a^b f(y) \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

الشروط الضروريه والكافيه للقيم القصوى

درسنا في الفصل الأول شرط اويلر الضروري لوجود قيم قصوى محليه ، ودرسنا في الفصل الرابع الشروط الركنيه الواجب تحققها عند وجود منحنيات قيم قصوى ذات نقاط ركنيه ، وسندرس في هذا الفصل الشروط الضروريه والكافيه لوجود قيم قصوى للداليات ، وقد ضم هذا الفصل ثلاثة بنود تناولنا في الأول منها شرط لجندر وتناولنا في الثاني شروط جاكوبي ، وفي الثالث شرط فيرشتراس .

٥ -١ : شرط لجندر Legendre Condition

اذا كانت D مجموعه جزئيه مفتوحه من الفضاء المتري $*$، وكان J داليـاً معرفـاً وقـابلاً للأشـتقاق ، n مـن المـرات عنـد $x\in D$ ، فـإن $\delta^n J(x,\Delta x)=\dfrac{d^n}{d\varepsilon^n}J(x+\varepsilon\Delta x)\big|_{\varepsilon=0}$ يسمى التغير النوني للدالي J ، وعندما $n=2$ ، نجد ان $\delta^2 J(x,\Delta x)=\dfrac{d^2}{d\varepsilon^2}J(x+\varepsilon\Delta x)\big|_{\varepsilon=0}$ والذي يسمى التغير الثاني (second variation) للدالي J .

مثال ٥ -١ -١

(أ) إذا كان $J:(a,b)\to \mathrm{R}$ ، فان

$$\delta J(x,\Delta x)=\frac{d}{d\varepsilon}J(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon=0}=J'(x)\,\Delta x \text{ ،}$$

$$\delta^2 J(x,\Delta x)=\frac{d^2}{d\varepsilon}J(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon=0}=J''(x)\,(\Delta x)^2$$

(ب) اذا كانت $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{R}^2$ ، J داله حقيقيه معرفه على منطقه مفتوحه في R^n ، فان

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon\Delta x) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x} J(x+\varepsilon\Delta x)\right]\Delta x_i$$

$$\delta^2 J(x,\Delta x) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 J(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial x_i\partial x_j}.\Delta x_i\Delta x_j\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\partial x_i\partial x_j$$

(ج) اذا كان

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \in \mathrm{D}_1$$

فان

$$J(y+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b F(x, y(x)+\varepsilon\Delta y(x), y'(x)+\varepsilon\Delta y'(x))\, dx$$

وعليه فان

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b \left[F_y(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\,\Delta y + F'_y(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\,\Delta y'\right] dx$$

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}(J+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b \Big[F_{yy}(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')(\Delta y)^2 + 2F_{yy'}(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\Delta y\Delta y'$$

$$+ F_{y'y'}(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')(\Delta y')^2\Big] dx$$

وبالتالي فإن

$$\delta^2 J(y,\Delta y) = \int_a^b \left[F_{yy}(x,y,y')(\Delta y)^2 + 2F_{yy'}(x,y,y')\Delta y\Delta y' + F_{y'y'}(x,y,y')(\Delta y')^2\right] dx$$

والان الى المبرهنه الآتيه :

مبرهنه ٥ -١ -١:

لتكن D مجموعه جزئيه مفتوحه من الفضاء المتري χ ، وليكن J دالياً معرفاً على D .

(ا) اذا كانت $x^* \in D$ نقطه نهايه صغرى للدالي J ، فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \geq 0$

لكل $\Delta x \in \chi$.

(ب) اذا كانت $x^* \in D$ نقطه نهايه عظمى للدالي J ، فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \leq 0$

لكل $\Delta x \in \chi$.

البرهان

بما ان $\Delta J = J(x^* + \varepsilon \Delta x) - J(x^*, \Delta x) = \dfrac{\varepsilon^2}{2!} \delta^2 J(x^*, \Delta x) + R_2(x^*, \Delta x, \varepsilon)$

وبما ان $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{R_2(x^*, \Delta x, \varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0$ ، $\delta(x^*, \Delta x) = 0$

إذاً إذا كانت $x^* \in D$ نقطه نهايه صغرى فإن $\Delta J = J(x^* + \varepsilon \Delta x) - J(x^*, \Delta x) \geq 0$

وعليه فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \geq 0$.

اما إذا كانت $x^* \in D$ نقطه نهايه عظمى للدالي J ، فإن $\Delta J \leq 0$ ، وعليه فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \leq 0$.

□

والآن ليكن $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$

إذاً

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[F_{yy}(\Delta y)^2 + 2F_{yy'}\, \Delta y \Delta y' + F_{y'y'}(\Delta y')^2\right] dx \qquad \dots (1)$$

لكن بالتكامل بالتجزئه نجد ان

$$2\int_a^b F_{yy'}\, \Delta y \Delta y'\, dx = \int_a^b F_{yy'}\, d((\Delta y)^2)\, dx = F_{yy'}(\Delta y)^2\Big|_a^b - \int_a^b (\Delta y)^2 \frac{d}{dx} F_{yy'}\, dx$$

وحيث ان $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$ ، إذاً

$$2\int_a^b F_{yy'}\, \Delta y \Delta y'\, dx = -\int_a^b (\Delta y)^2 \frac{d}{dx} F_{yy'}\, dx \qquad \dots (2)$$

ومن (1) ، (2) نجد ان

$$\delta^2 J = \int_a^b [F_{y'y'}(\Delta y')^2 + (F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'})(\Delta y)^2]\, dx$$

وإذا فرضنا ان $P = F_{y'y'}$ ، $\Delta y = h$ ، $Q = F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}$

لوجدنا ان

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)\, dx \qquad \ldots (3)$$

والى المبرهنه الآتيه

مبرهنه ٥ -١ -٢ :

إذا كان
$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)\, dx \geq 0$$

لكل $h \in D_1$ ، $h(a) = h(b) = 0$ ، فإن $P(x) \geq 0$ ، لكل $x \in [a,b]$.

البرهان

لكي نثبت ان $P(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ ، نفرض وجود $x_0 \in [a,b]$ ، بحيث ان $P(x_0) = -2\beta$ ، $\beta > 0$. وحيث ان $P(x)$ داله متصله على $[a,b]$ ، إذاً توجد $\alpha > 0$ بحيث ان $a \leq x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \leq b$ ، $P(x_0) \leq -\beta$ ، $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$. والآن لتكن

$$h(x) = \begin{cases} Sin^2\left(\frac{\pi(x-x_0)}{\alpha}\right) & , \; x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \\ 0 & , \; x \notin [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \end{cases}$$

إذا

$$\delta^2 J[h] = \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{P\pi^2}{\alpha^2} Sin^2\left(\frac{2\pi(x-x_0)}{\alpha}\right) dx + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} Q\, Sin^4\left(\frac{\pi(x-x_0)}{\alpha}\right) dx < \frac{-2\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha$$

حيث
$$M = \max_{a \leq x \leq b} |Q(x)|$$

وعندما تكون α صغيره جداً ، نجد ان

$$\delta^2 J[h] = \frac{-\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha < 0$$

وعليه عندما $\delta^2 J(h) \ge 0$ تكون $P(x) \ge 0$ ، لكل $x \in [a,b]$.

وأخيراً الى المبرهنه الآتيه التي تعطي شرط لجندر الضروري.

□

<u>مبرهنه ٥ -١ -٣:</u> (شرط لجندر الضروري)

إذا كان للدالي

$$J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\ dx \in D_1 \text{ ، } y(a) = A \text{ ، } y(b) = B$$

قيمه صغرى على المنحني $y(x)$ ، فإن $F_{y'y'} \ge 0$ لأي نقطه واقعه على $y(x)$.

<u>البرهان</u>

بما ان للدالي $J[y]$ قيمه صغرى على $y(x)$ ، إذاً $\delta^2 J[h] \ge 0$ ، لكل $h(x) = \Delta y(x) \in D_1$. لكن $\delta^2 J[h] \ge 0$ ، لكل $h(a) = h(b) = 0$ ، يعني ان $P = F_{y'y'} \ge 0$ لكل $x \in [a,b]$ حسب مبرهنه (٥ -١ -٢).

□

<u>ملاحظه</u>

(أ) اذا كان للدالي $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\ dx \in D_1$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$ قيمه عظمى محليه على $y(x)$ ، فإن $F_{y'y'} \le 0$ لكل $x \in [a,b]$.

(ب) اذا كان $F_{y'y'} > 0$ لكل $x \in [a,b]$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمه صغرى محليه على $y(x)$.

اما اذا كان $F_{y'y'} < 0$ لكل $x \in [a,b]$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمه عظمى محليه على المنحني $y(x)$.

مثال ٥ -١ -٢ :

ليكن $J[y]=\int_0^1 y'^3\ dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$

إذاً الحل العام لمعادله اويلر- لاجرانج هو $y = C_1x+C_2$ لكن $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ يعني ان $C_2 = 0$ ، $C_1 = 1$ ، إذاً $y = x$. لكن $F_{y'y'} = 6y'$ ، $y' = 1$ إذاً $F_{y'y'} = 6 > 0$ ، لكل $x \in [0,1]$ ، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمه صغرى محليه على المستقيم $y = x$.

مثال ٥ -١ -٣ :

ليكن $J[y]=\int_0^1 (12xy - y'^2)\ dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$

إذاً معادلـــه اويلـــر ـــ لاجـــرانج هـــي $12x + 2y'' = 0$ ، وحلـــها العـــام هـــو $y = -x^3 + C_1x+C_2$. لكـــن $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ ، إذاً $C_2 = 0$ ، $C_1 = 2$ ، وعليــه فــإن $y = 2x - x^3$ ، لكــن $F_{y'} = -2y'$ ، إذاً $F_{y'y'} = -2 < 0$ ، وعليــه فــإن للدالي $J[y]$ قيمه عظمى محليه على المنحني $y = 2x - x^3$.

٥ -٢: شروط جاكوبي Jacobi Conditions

ليكن
$$J[h]=\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)\ dx \in D_1 \qquad \dots (1)$$

حيــث $P(x) = F_{y'y'}$ ، $Q(x) = F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}$ ، $h(a) = h(b) = 0$. إذاً معادلــه اويلر- لاجرانج للدالي $J[y]$ ، هي $F_h - \frac{d}{dx}F_{h'} = 0$ وعليه فإن

$$Qh - \frac{d}{dx}(Ph') = 0 \qquad \dots (2)$$

وهي معادله تفاضليه خطيه من الرتبه الثانيه تحقق الشرط $h(a) = h(b) = 0$ ، يطلق عليها عاده معادله جاكوبي نسبة للرياضي الألماني كارل جاكوبي الذي

درسها عام ١٨٤٢ م ، والآن الى التعريف الآتي .

تعريف (٥ -٢ -١)

يقال عن نقطه $\bar{a}$ انها نقطه مرافقه (Conjugate Point) للنقطه a ، $\bar{a} \neq a$ اذا كان $h:[a,\bar{a}] \to R$ حلاً لمعادله جاكوبي وكان $h(a) = h(\bar{a}) = 0$ بينما $h(x) \neq 0$ لكل $x \in [a,\bar{a}]$.

لاحظ ان $\bar{a}$ نقطه مرافقه للنقطه a ، اذا كانت $\bar{a} \neq a$ ، وكان $h(\bar{a}) = 0$ ، حيث h حل لمعادله جاكوبي ، $h(a) = 0$ ، $h'(a) = 1$.

مثال ٥ -٢ -١

ليكن $J[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2)\ dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(a) = 0$.

إذاً معادله جاكوبي للدالي $J[h]$ هي $-2h - \frac{d}{dx}(F_{y'y'} h') = 0$ ، ومنها نجد ان $h'' + h = 0$ ، وعليه فإن $h(x) = C_1 Cos\, x + C_2 Sin\, x$ لكن $h(0) = 0$ ، $h(a) = 0$ ، إذاً $C_1 = 0$ ، $C_2 Sin\, a = 0$ ، وعليه فإن $a = n\pi$ ، وهذا يعني ان $h(x) = C_2 Sin\, x$ تنعدم عند النقاط $x = n\pi$ ، حيث n عدد صحيح ، وعليه اذا كانت $a > n\pi$ ، فإن $x = n\pi$ نقطه مرافقه للنقطه $x = 0$. اما اذا كانت $a < \pi$ فإن $h(x) = 0$ عند $x = 0$ فقط ، وفي هذه الحاله لاتوجد نقاط مرافقه للصفر.

والآن الى المبرهنه الآتيه .

مبرهنه (٥ -٢ -١) " شرط جاكوبي الضروري"

اذا كان للدالي $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\ dx \in D_1$ قيمه صغرى محليه على

المنحني $y(x)$ ، وكان $F_{y'y'} > 0$ لكل $x \in [a,b]$ ، فلا توجد في الفتره (a,b) أي نقطه مرافقه للنقطه a .

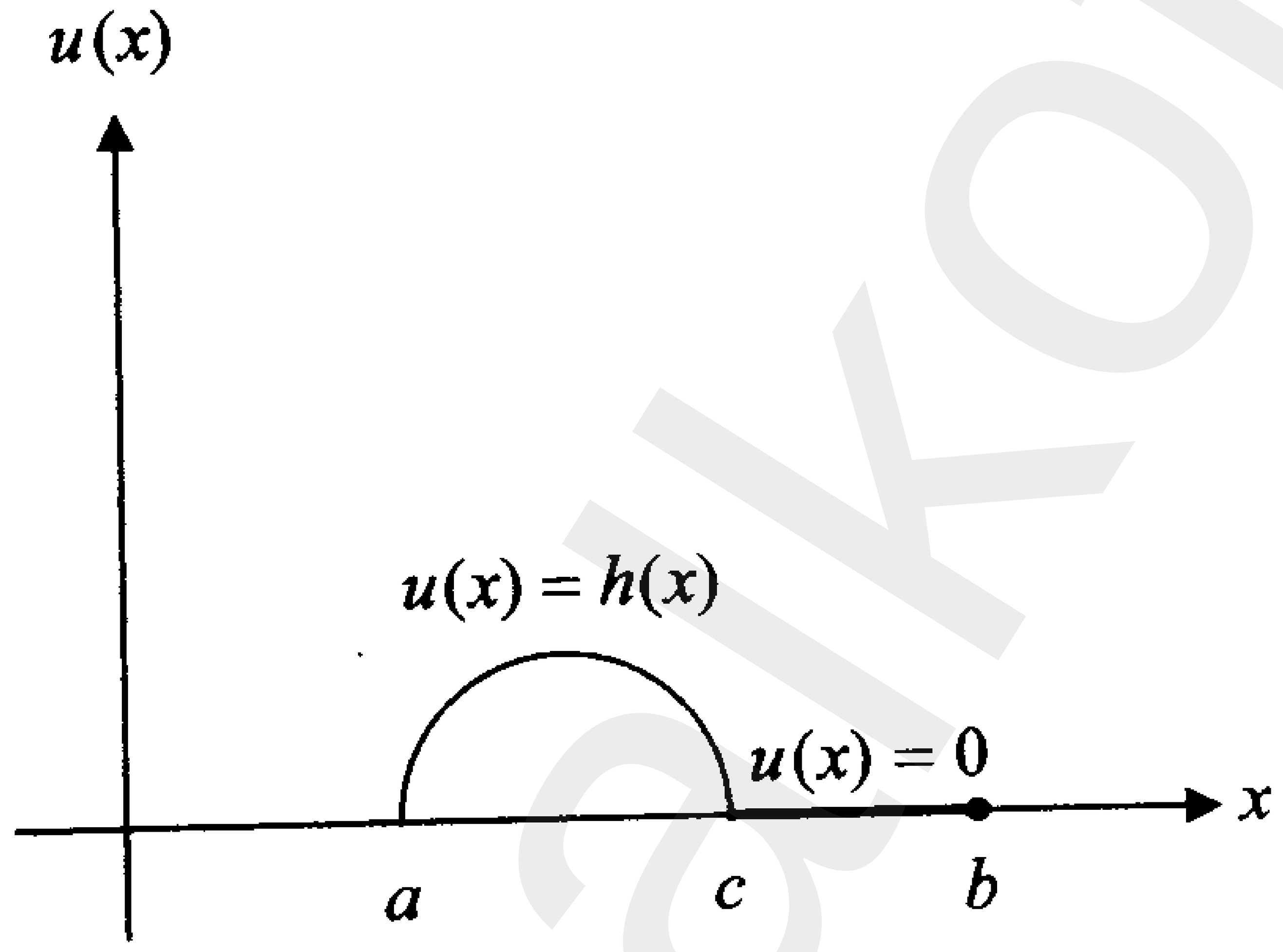
البرهان

نفرض ان $c < b$ نقطه مرافقه للنقطه a . إذاً يوجد حل $h(x)$ لمعادله جاكوبي التفاضليه بحيث ان $h(a) = h(c) = 0$ ، بينما $h(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,c)$.

والآن لنعرف الداله

$$u(x) = \begin{cases} h(x) & , \quad x \in [a,c] \\ 0 & , \quad x \in [c,b] \end{cases} \qquad \dots (1)$$

، شكل (٥ -١).



شكل (٥ -١)

إذاً $u(x)$ تحقق معادله جاكوبي ، وبالتالي فإنها تحقق معادله اويلر ـ لاجرانج على الشكل

$$g_u(x,u,u') = \frac{d}{dx} g_{u'}(x,u,u') \qquad \dots (2)$$

على $[a,c]$ و $[c,b]$ على التوالي

والآن افرض ان

$$F_{yy}\cdot u^2 + 2F_{yy'}\cdot uu' + F_{y'y'}\cdot u'^2 = 2g(x,u,u') \text{ ،}$$

نجد ان

$$2gg_u = 2F_{yy}\cdot u + 2F_{yy'}\cdot u' \text{ ،}$$

$$2gg_{u'} = 2F_{yy'}\cdot u + 2u'F_{y'y'}\cdot u'$$

وعليه فإن

$$2\,g(x,u,u') = u\,g_u + u'g_{u'} \qquad \dots (3)$$

ومن (2) ، (3) نجد ان $2\,g(x,u,u') = u\cdot\frac{d}{dx}g_{u'} + u'\cdot g_{u'}$ ، وبالتالي فإن

$$2\,g(x,u,u') = \frac{d}{dx}(u\,g_{u'}) \qquad \dots (4)$$

لكن $y(x)\in D_1$ ، إذاً $\frac{d}{dx}(u\,g_{u'})$ داله متصله على $[a,c]$ وعلى $[c,b]$ ، وعليه فإن $u'(c^+) = u'(c^-) = 0$ ، كما ان

$$J[y(x)] = \int_a^c d(u\,g_{u'}) + \int_c^b 2\,g(x,u,u')\,dx$$

لكن $u(a) = u(c) = 0$ ، إذاً $\int_a^b d(u\,g_{u'}) = 0$.

وحيث ان $u(x)=0$ ، لكل $x\in[c,b]$ ، إذاً $g(x,u,u')=0$ وعليه فإن $\int_c^d 2\,g(x,u,u') = 0$. إذاً $J[y(x)] = 0$ وعليه فإن $J[y(x)]$ قيمه صغرى محليه للدالي $J[y]$ وبالتالي فإن $h'(c) = 0$ ، لكن لمعادله جاكوبي حل وحيد لانها معادله تفاضليه خطيه من الرتبه الثانيه بمعاملات متصله . إذاً $h(c) = h'(c) = 0$ ، وعليه فإن $h(x) = 0$ لكل $x\in[a,c]$ وهذا خلاف الفرض .

إذاً c لايمكن ان لايمكن ان ترافق a .

□

مثال ٥ -٢ -٢:

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني القيم القصوى للدالي

$$J[y]=\int_0^a (y'^2-y^2)\ dx \text{ ، } y(0)=0 \text{ ، } y(a)=0 \text{ .}$$

الحل

بما ان $h(x)=c\,Sin\,x$ حل لمعادلة جاكوبي إذاً إذا كانت $a<\pi$ فلا توجد نقطه مرافقه للنقطه $x=0$ في $(0,a)$ ، وعليه فإن شرط جاكوبي متحقق في هذه الحاله اما اذا كانت $a>\pi$ ، فإن الفتره $(0,a)$ تحوي نقطه مرافقه للنقطه ، $x=0$ وعليه فإن شرط جاكوبي لايتحقق في هذه الحاله .

مثال ٥ -٢ -٣:

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني قيم القصوى للدالي

$$J[y]=\int_0^a (y'^2+y^2+x^2)\ dx \text{ ، } y(0)=0 \text{ ، } y(a)=0 \text{ .}$$

الحل

بما ان معادلة جاكوبي للدالي هي $h''-h=0$ ، إذاً حلها العام هو $h(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$ لكن $h(0)=0$ ، إذاً $C_2=-C$ ، وعليه فإن $h(x)=C_1(e^{x}-e^{-x})$ ، وبالتالي فإن $h(x)=0$ عندما $x=0$ وعليه فإن شرط جاكوبي يتحقق لاي قيمه للثابت a .

مثال ٥ -٢ -٤:

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني القيم القصوى للدالي

$$J[y]=\int_{-a}^a y\sqrt{1+y'^2}\ dx \text{ ، } y(-a)=y(a)=b \text{ .}$$

الحل

بما ان حل معادله اويلر ـ لاجرانج للدالي $J[y]$ هو $y = c\ Cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ (تأكد من ذلك) ، إذاً لتحديد معادله جاكوبي، لاحظ ان $F = y\sqrt{1+y'^2}$ ، $y = c\ Cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ ،

إذاً $F_y = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$ ، $F_{yy} = \frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}} = c\ Sech^2\left(\frac{x}{c}\right) > 0$ ، لكل $c > 0$.

لكن $F_{yy} = 0$ ، $F_{yy'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \tanh\left(\frac{x}{c}\right)$ إذاً معادله جاكوبي هي

$$c\frac{d}{dx}\left(h'\ Sech^2\left(\frac{x}{c}\right)\right) + \frac{h}{c}\ Sech^2\left(\frac{x}{c}\right) = 0 \qquad \ldots (1)$$

و $h(x) = Sinh\left(\frac{x}{c}\right)$ حل اولي للمعادله (1) ، وبإستخدام طريقه تغير الوسائط (البرامترات) "Variation of Parameters" لحل المعادله (1)، وفرضنا ان $h = z\,Sin\,h\left(\frac{x}{c}\right)$ نجد ان

$$\frac{h(x)}{c} = A\ Sinh\left(\frac{x}{c}\right) + B\left[\left(\frac{x}{c}\right)\ Sinh\left(\frac{x}{c}\right) - Cosh\left(\frac{x}{c}\right)\right]$$

وبوضع $h(-a) = 0$ ، $B = 1$ ، نجد ان

$$h(x) = \left[x + a - c\ Coth\left(\frac{a}{c}\right)\right]\ Sinh\left(\frac{x}{c}\right) - Cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

لكن $h(-a) = 0$ ، $h'(-a) = -Coth\left(\frac{a}{c}\right)\ Cosh\left(\frac{-a}{c}\right) < 0$ ، $h'(\infty) > 0$ إذاً يوجد جذر للمعادله $h(x)$ مختلف عن $x = \frac{-a}{c}$ وعليه فإن شرط جاكوبي يكافئ الشرط

$$h(a) = 2\left[a\,Sinh\left(\frac{a}{c}\right) - c\,Cosh\left(\frac{a}{c}\right)\right] \leq 0$$

وعليـه فـإن $h(a) = 0 \iff Coth\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c}$. اذاً $h(a) = 0$ عنـدما $\frac{a}{c} = 1.1197$ ،

وبالتـالي فـإن $h(a) \leq 0$ لكـل $\frac{a}{c} \leq 1.1197$ وعليـه فـإن شـرط جـاكوبي يتحقـق

للقيم الصغيره الى $\frac{a}{c}$ ، والمحدده بالعلاقه $c \cdot Cosh\left(\frac{x}{c}\right) = b > 0$ ، ولا يتحقق

للقيم الكبيره الى $\frac{a}{c}$.

واخيراً الى المبرهنه الآتيه التي تحدد الشرط الكافي لوجود قيم قصوى محليه "تسمى قيم قصوى ضعيفه ، اذا كانت للفرق $\Delta J[y]$ نفس الأشاره لكل $y \in D_1$ ، وتسمى قيم قصوى قويه ، اذا كان للدالي $\Delta J[y]$ نفس الأشاره لكل $y \in \ell$ " .

مبرهنه ٥ -٢ -٢:

يكون للدالي $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\ dx \in D_1$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$

قيمه صغرى محليه ضعيفه على المنحني $y = y(x)$ ، اذا تحققت الشروط الآتيه :

(أ) $y(x)$ حل لمعادله اويلر ـ لاجرانج

(ب) $P(x) = F_{y'y'} > 0$ لكلٍ $x \in [a,b]$

(جـ) لا تحتوي الفتره المغلقه $[a,b]$ أي نقطه مرافقه للنقطه a "يسمى هذا الشرط : شرط جاكوبي الموسع"

البرهان

بما ان
$$\delta^2 J = \int_a^b \left[F_{yy} h^2 + 2hh'\ F_{yy'} + h'^2\ F_{y'y'}\right] dx$$

إذاً
$$\delta^2 J = \int_a^b \left[F_{yy} h^2 +\ hh'\ F_{yy'} + hh'\ F_{yy'}\ + h'^2\ F_{y'y'}\right] dx$$
$$= \int_a^b \left[h(hF_{yy} + h'\ F_{yy'}) + h'\ (hF_{yy'} + h' F_{y'y'})\right] dx$$

وبالتكامل بالتجزئه بالنسبه للحد الأخير واستخدام الشرط $h(a) = h(b) = 0$ ، نجد ان

$$\delta J^2 = \int_a^b \left[hF_{yy} + h'\, F_y - \frac{d}{dx}(hF_y + h' F_{yy'}) \right] h(x)\ dx$$

وعليه فإن $\quad \ldots (1)$

$$\delta J^2 = \int_a^b \left[hF_{yy} - h'\, F_{yy'} - \frac{d}{dx}(h' F_{yy'}) \right] h(x)\ dx$$

والآن اذا وجدت $h(x)$ بحيث ان

$$hF_{yy} - h'\, F_{yy'} - \frac{d}{dx}(h' F_{y'y'}) = 0$$

فإن ذلك يعني ان $h(x)$ تحقق العلاقه

$$\frac{d}{dx}(h' F_{y'y'}) + h(x)\,[\frac{d}{dx}(F_{yy'} - F_{yy})] = 0 \quad \ldots (2)$$

، $h(a) = h(b) = 0$. واذا فرضنا عدم وجود نقطه مرافقه للنقطه a في $[a,b]$ فان ذلك يعني وجود داله $u(x)$ بحيث ان :

$$\frac{d}{dx}(u' F_{y'y'}) + u(x)\,[\frac{d}{dx}(F_{yy'} - F_{yy})] = 0 \quad \ldots (3)$$

، $u(a) = 0$ ، $u'(a) = 1$ ، $u(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b]$ ، وعليه فإن

$$\frac{d}{dx}(F_{yy'} - F_{yy}) = \frac{-1}{u} \cdot \frac{d}{dx}(u' F_{y'y'}) \quad \ldots (4)$$

ومن (1) ، (4) نجد ان

$$\delta^2 J = \int_a^b [\frac{h^2}{u} \cdot \frac{d}{dx}(u' F_{y'y'}) - h\frac{d}{dx}(h' F_{y'y'})]\, dx$$

وبالتكامل بالتجزئه واستخدام الشرط $h(a) = h(b) = 0$ ، نجد ان

$$\delta^2 J = \int_a^b [h'^2 F_{y'y'} - u' F_{y'y'} \frac{d}{dx}(\frac{h^2}{u})]\, dx$$

$$= \int_a^b F_{y'y'}\,[h'^2 - \frac{2hh'u'}{u} + \frac{u'^2 h^2}{u^2}]\, dx$$

$$= \int_a^b F_{y'y'}\,(h' - \frac{u' h}{u})^2\ dx$$

لكـن $(h' - \frac{u'h}{u})^2 > 0$ ، لأنـه اذا كـان $h' - \frac{u'h}{u} = 0$ ، فـإن $h' - \frac{u'h}{u} = 0$ وعليه فإن $u(x) = k\,h(x)$ ، حيث k ثابت . لكن $h(b) = 0$ ، اذاً $u(b) = 0$ وهذا خلاف الفرض . اذاً $(h' - \frac{u'h}{u})^2 > 0$ ، وعليه فإن $F_{yy} > 0 \Leftrightarrow \delta^2 J > 0$ ، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمه صغرى محليه .

□

مثال ٥ -٢ -٥:

ليكن

$$J[y] = \int_0^1 y'^3 \, dx \text{ ، } y(0) = 0 \text{ ، } y(1) = 1 \text{ .}$$

إذاً معادله اويلر- لاجرانج للدالي $J[y]$ هي $y' = c$ ، وعليه فإن $y = cx + b$ ، لكن $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ ، اذاً $y = x$. لكن $F_{yy} = 6y'$ ، $y' = 1$ ، اذاً $F_{yy} = 6 > 0$ لكل $x \in [0,1]$. وحيث ان معادلـه جـاكوبي للـدالي $J[y]$ هـي $h'(x) = c$ ، اذاً $h(x) = x$ وبالتـالي فـإن $h(0) = 0$ ، $h'(0) = 1$ وعليـه فـإن $[0,1]$ لا يحـوي أي نقطـه مرافقـه للنقطـه $x = 0$ ، وبالتـالي فـإن للـدالي $J[y]$ قيمـه صغرى محليـه ضعيفه على $y = x$.

٥ -٣: شرط فيرشتراس Weierstrass Condition

سنركز اهتمامنـا في هـذا الجـزء على دراسـة شـرط فيرشـتراس الضـروري واللازم لوجود قيم قصوى صغرى او عظمى محليـه للداليات وللتمهيد الى ذلك نورد مايلي.

تعريف ٥ -٣ -١:

يقال عن عائله من المنحنيات $y = y(x,c)$ ، انها تشكل مجالاً خاصاً او

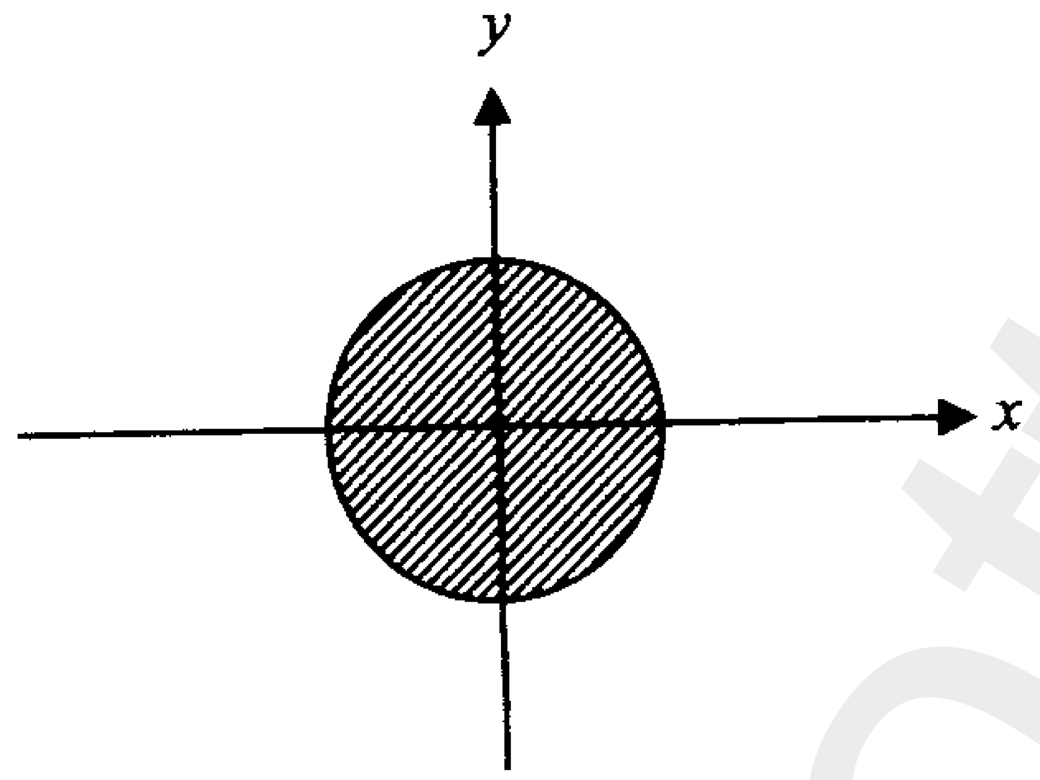
فعلياً (Proper Field) في المنطقه $D \subseteq \mathrm{R}^2$ ، اذا مرّ بكل نقطه من نقاط المنطقه D ، منحنى واحد وواحد فقط من تلك العائله .

ويعرف ميل المجال $P(x,y)$ عن النقطه (x,y) ، بانه ميل المماس لمنحني من العائله $y(x,c)$ يمر بالنقطه (x,y) .

مثال ٥ -٣ -١:

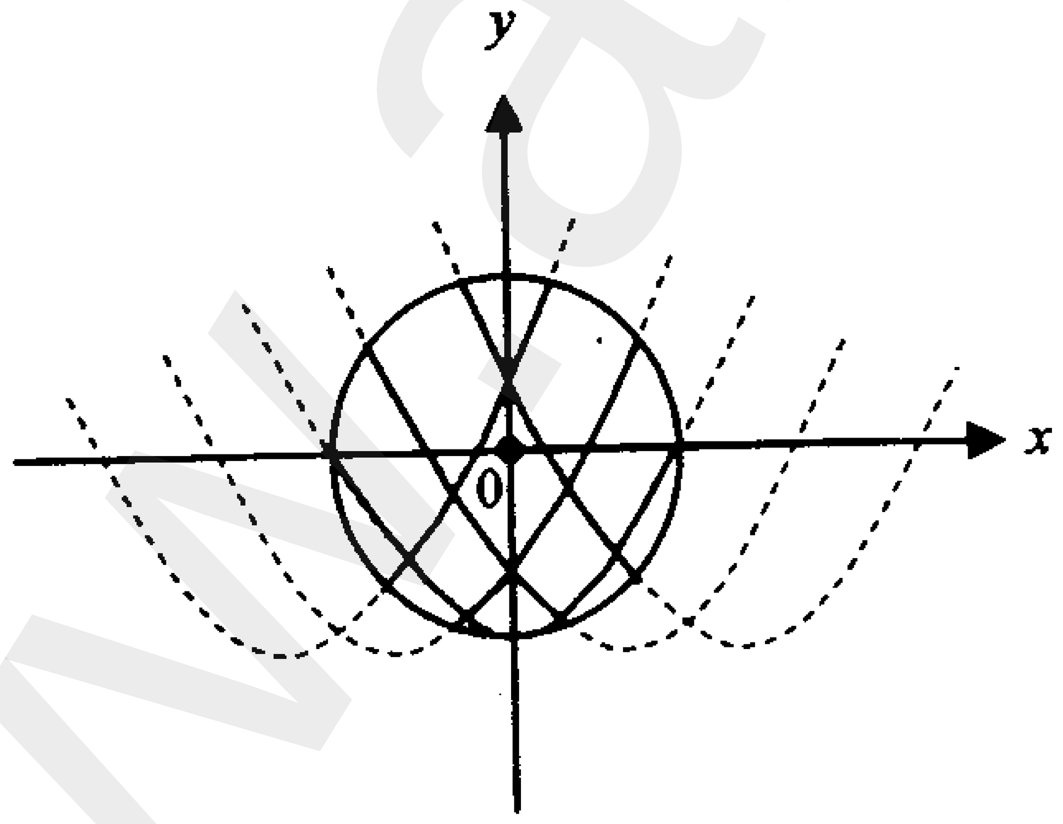
اذا كانت $D = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ ، فأن

(أ) عائله الخطوط المستقيمه $y = x + c$ ، حيث c ثابت تمثل مجالاً خاصاً في المنطقه D ، ميله $P(x,y) = 1$ ، انظر الشكل (٥ -٢) .



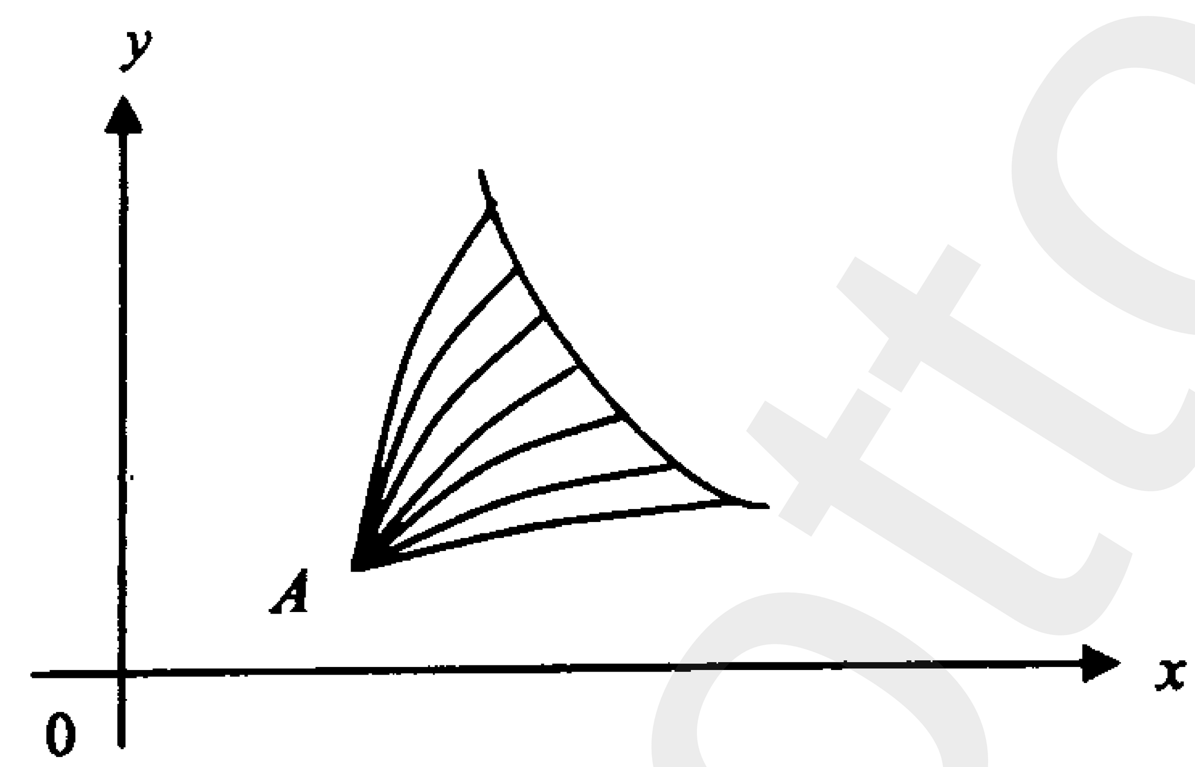
شكل (٥ -٢)

(ب) عائله القطوع المكافئه $y = (x-a)^2 - 1$ ، لاتمثل مجالاً على D ، لان تلك القطاعات تتقاطع دائره الدائره $x^2+y^2 = 1$ ، انظر شكل (٥ -٣) .



شكل (٥ -٣)

ملاحظه: اذا كانت كل منحنيات العائلة $y = y(x,c)$ تمر خلال نقطة معينة $A(x_0 , y_0)$ فإنها لاتمثل مجالاً خاصاً في المنطقه D . وفي هذه الحالة ، إذا كانت المنحنيات تغطي المنطقه D كلها ولا تتقاطع عند اي نقطه في D ما عدا عند النقطه $A(x_0 , y_0)$. أي أن شروط تعريف المجال تتحقق عند كل نقاط D ما عدا عند النقطه $A(x_0 , y_0)$. حينئذ نقول أن العائلة $y = y(x,c)$ تمثل مجالاً مركزياً (Central Field) انظر شكل (٥ -٤) .

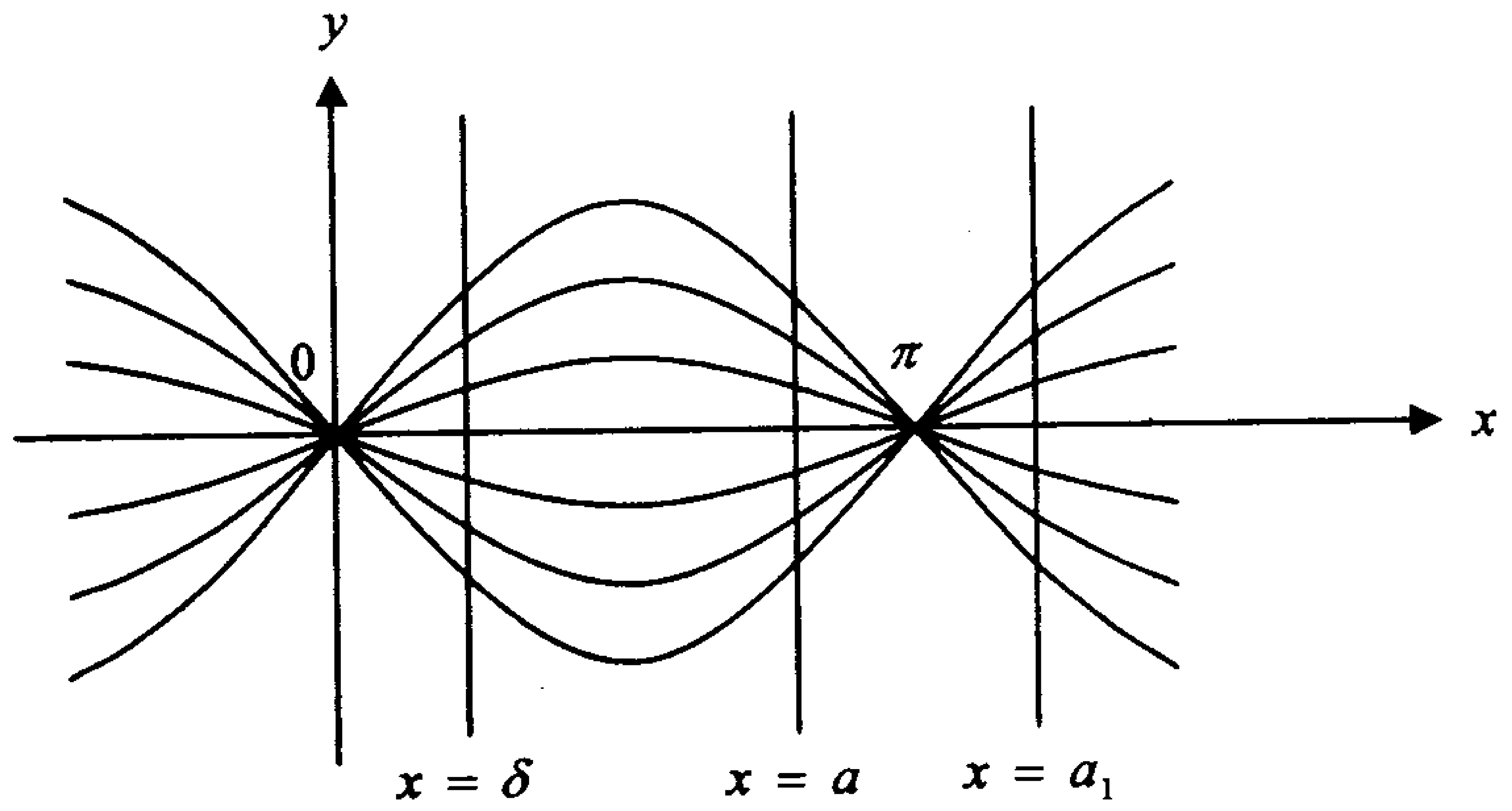


شكل (٥ -٤)

مثال ٥ -٣ -٢:

العائله $a < \pi$ ، $0 \le x \le a$ ، $y = c \, Sin x$ ، حيث c ثابت اختياري ، تمثل مجالاً مركزياً ، انظر الشكل (٥ -٥) . لاحظ أن نفس العائلة (المنحني الجيبي) تمثل مجالاً خاصاً في جوار صغير لفترة من محور السينات وهي $\delta \le x \le a$ ، حيث $0 < \delta$ ، $a < \pi$. انظر الشكل (٥ -٥)

كما نلاحظ أيضاً أن نفس العائلة لاتمثل مجالاً في جوار فترة من محور السينات هي $0 \le x \le a_1$ حيث $a_1 > \pi$. انظر الشكل (٥ -٥)

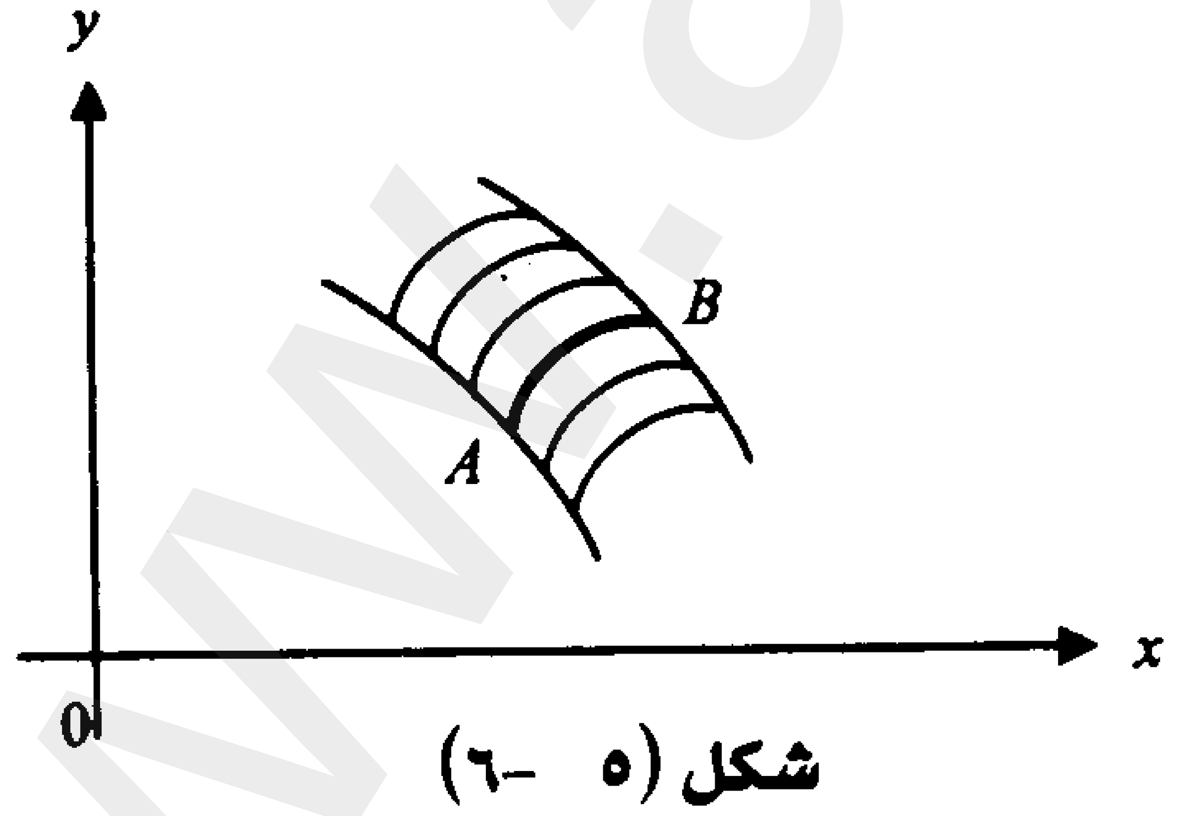


شكل (٥ -٥)

تعريف ٥ -٣ -٢:

اذا تكون المجال الخاص او المجال المركزي من عائله من منحنيات القيم القصوى لمسأله معينة من مسائل التغيرات ، فإنه يسمى مجال قيم قصوى .

والآن إذا كان $y = y(x)$ **منحني قيم قصوى للدالي** $J[y] = \int_{x_2}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$ **،**
وكانت نقاط الحدود $A(x_0, y_0)$ ، $B(x_1, y_1)$ **ثابته. فيقال أن منحنى القيم القصوى** $y = y(x)$ **ينتمي الى مجال القيم القصوى ، إذا كانت عائلة منحنيات القيم القصوى** $y = y(x,c)$ **لهذا الدالي تمثل مجالاً يحتوي على منحنى القيم القصوى** $y = y(x)$ **لقيمة معينة** $C = C_0$ **والمنحنى** $y = y(x)$ **لا يقع على حدود المنطقة** D **التي تمثل فيها العائلة** $y = y(x,c)$ **مجالاً خاصاً . انظر الشكل (٥ -٦)**



شكل (٥ -٦)

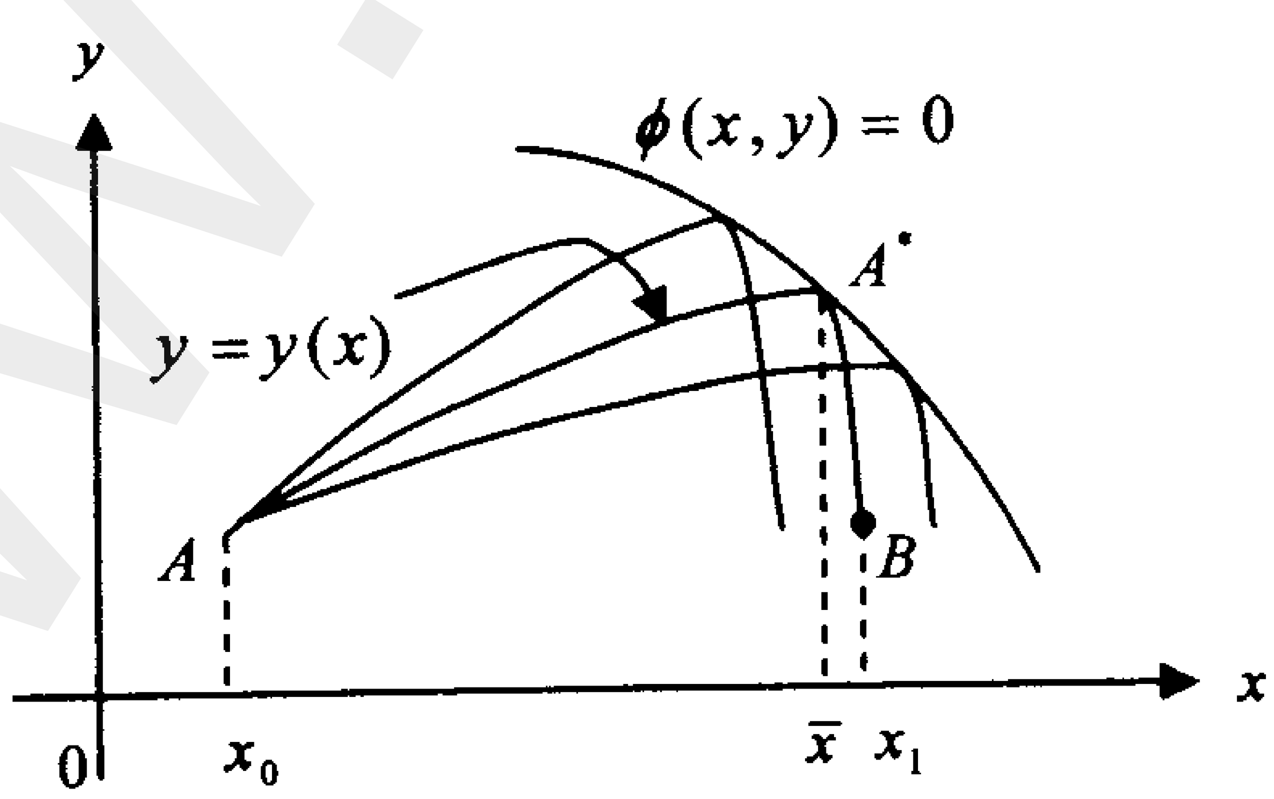
واذا كان رسم منحنيات القيم القصوى ذات المركز $A(x_0, y_0)$ ، يمثل مجالاً في جوار منحني القيم القصوى $y = y(x)$ والذي يمر بالنقطه A ، فإن المجال المركزي يحتوي على منحني القيم القصوى $y = y(x)$.

مثال ٥ -٣ -٣:

ليكن $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2)\, dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(a) = 0$.

إذاً الحل العام لمعادلة اويلر- لاجرانج هو $y = c\, Sin x$ ، ومنحنيات هذه العائله تكون مجالاً مركزياً في الفتره $[0,a]$ ، $a < \pi$ ، ويشتمل على منحني قيم قصوى $y = 0$ عندما $c = 0$. لاحظ ان $[0,a]$ ، $a < \pi$ لايحوي نقاط مرافقه للنقطه $x = 0$. اما اذا كانت $a \geq \pi$ فإن العائله $y = c\, Sin x$ لا تمثل مجالاً لان الفتره $[0,a]$ ، $a \geq \pi$ تحوي نقاط مرافقه للنقطه $x = 0$.

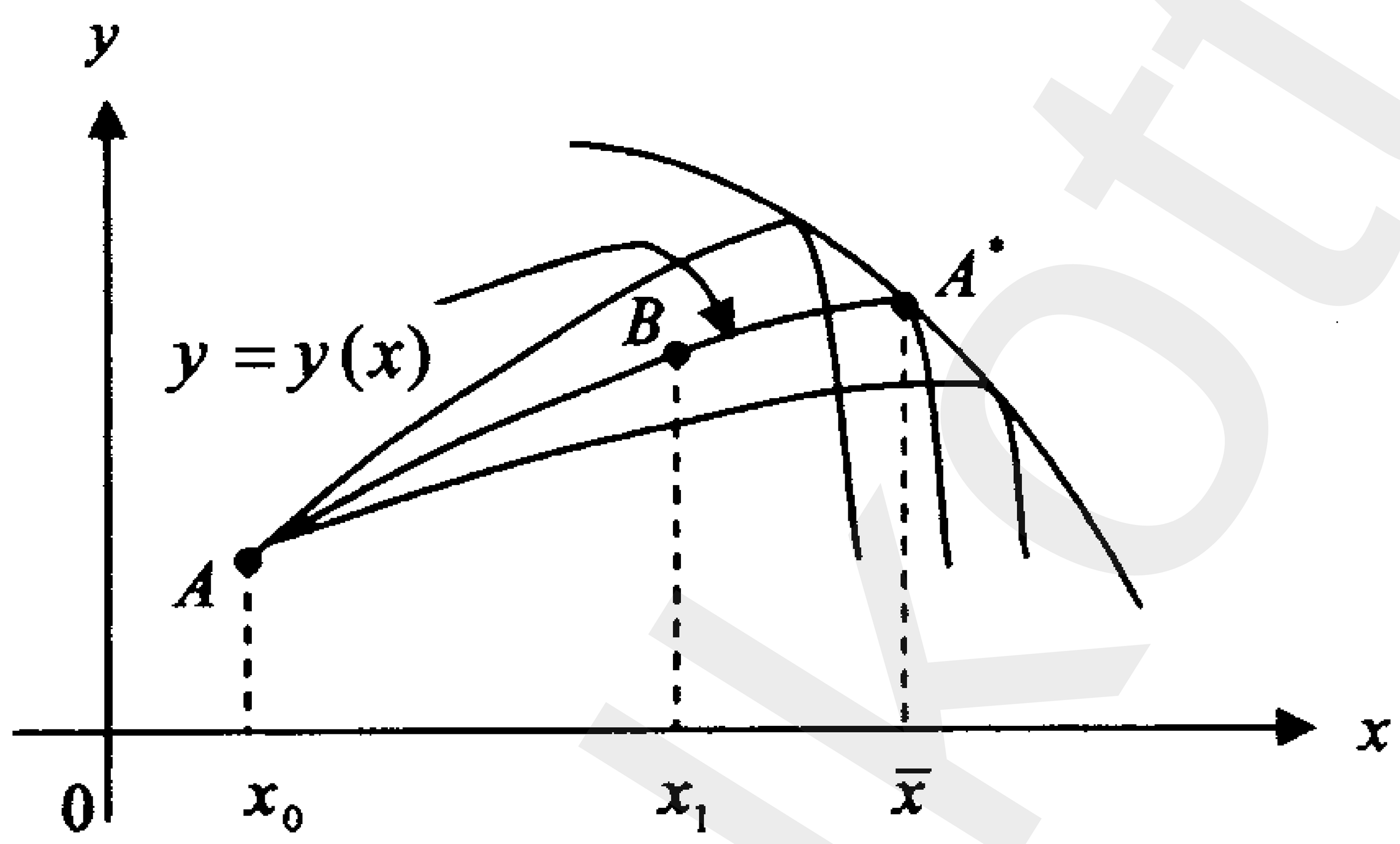
ملاحظه: اذا كانت $F(x,y,c) = 0$ عائله من المنحنيات الماره بنقطه معينه $A(x_0, y_0)$ وتقاطع المنحنيان القريبان من بعضهما في تلك العائله عند نقاط من منحنى $\phi(x,y) = 0$ " يسمى مثل هذا المنحنى المنحنى المميز لتلك العائله" ، فإن منحنيات هذه العائله والتي تكون في حاله قرب من منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ الذي يمر بالنقطتين $A(x_0, y_0)$ ، $B(x_1, y_1)$ سوف تتقاطع عند نقاط قريبه من نقطه التماس للمنحنى $y(x)$ ، مع المنحنى المميز ، انظر شكل (٥ -٧).



شكل (٥ -٧)

واذا كان للقوس AB من منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ ، نقطه مثل A^* مختلفه عن A ومشتركه مع المنحني المميز للعائله $y = y(x,c)$ ، فإن منحنيات هذه العائلة والقريبه من $y(x)$ سوف تتقاطع مع نفسها ومع المنحنى $y(x)$ قريباً من النقطه A^* ، وبالتالي فإنها لاتمثل مجالاً ، شكل (٥ -٧) ، وهذا يعني ان A^* نقطه مرافقه للنقطه A ، وبالتالي فإن A^* تمثل حلاً لمعادله جاكوبي يحقق الشرط $h(x_0) = 0$ ، $h'(x_0) = 1$ ، وعليه فإن الفتره (x_0 , x_1) تحوي نقطه مرافقه للنقطه x_0 .

اما اذا كان القوس AB من منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ ، لايشترك بنقاط مختلفه عن A مع المنحنى المميز لعائله منحنيات القيم القصوى والتي تشمل على المنحنى $y = y(x)$ ، فإن منحنيات القيم القصوى من هذه العائله والتي تكون قريبه قرباً كافياً من القوس AB يشتمل على هذا القوس ، شكل (٥ -٨) .



شكل (٥ -٨)

إذاً لاتوجد نقاط مرافقه للنقطه A على القوس AB ، وهذا يعني عدم وجود نقطه مرافقه للنقطه x_0 على الفتره (x_0 , x_1) ، ومن ثم فان شرط جاكوبي يتحقق ، وعليه فان القوس AB يقع في مجال مركزي مكون من منحنيات القيم القصوى مركزه النقطه A .

والآن الى تعريف دالة الزياده لفيرشتراس .

تعريف ٥ -٣ -٣

نسمي الداله $E:[a,b] \times \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}$ ، حيث

$$E(x,y,y',P) = F(x,y,P) - F(x,y,y') - (P-y')\,F_{y'}(x,y,y')$$

حيث P ميل المجال (الحقل) المركزي ، داله الزياده لفيرشتراس (weierstrass excess Function) نسبة للرياضي الألماني كارل فيرشتراس (١٨١٥م – ١٨٧٩م) .

مثال ٥ -٣ -٤:

إذا كان $J[y] = \int_0^1 y'^3 \; dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$

فإن حل معادله اويلر ـ لاجرانج هو $y = x$ ، وعليه فإن $y' = 1$. وبالتالي فإن

$$E(x,y,y',P) = P^3 - 1 - 3(P-1) = P^3 - 3P + 2$$

والآن الى المبرهنه الآتيه

مبرهنه ٥ -٣ -١:

اذا كان $y(x)$ منحني قيمه صغرى محليه للدالي

$J[y] = \int_a^b F(x,y,y') \; dx \in \mathrm{D}_1$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$.

فإن $E(x,y,y',P) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ ، ولكل $P \in \mathrm{R}$.

البرهان:

ليكن $[c,d] \subset [a,b]$ ، ولنفرض ان

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x) & x \in [c,d] \subset [a,b] \\ Y(x) & x \in [c,\varepsilon]\,,\ \varepsilon \in [c,d) \\ \phi(x,\varepsilon) & x \in [\varepsilon,d] \end{cases}$$

حيث $Y(x) = y(c) + p(x-c)$ ، $P \in \mathbb{R}$ ، $\phi(x,\varepsilon) = y(x) + \frac{Y(\varepsilon) - y(\varepsilon)}{d-\varepsilon}(d-\varepsilon)$

لكن للدالي $J[y]$ قيمه صغرى محليه على $y(x)$ ، إذاً $J[y] \le J[y^*]$ ، $\Delta J(c) = 0$. لكن

$$g(\varepsilon) = \Delta J(\varepsilon) = \int_c^{\varepsilon} [F(x, Y^*(x), Y^{*'}(x)) - F(x,y,y')]\,dx + \int_{\varepsilon}^{d} [F(x, \phi(x,\varepsilon), \phi_x(x,\varepsilon)) - F(x,y,y')]\,dx$$

وبإستخدام قاعده ليبتز ، نجد ان

$$\delta J[\varepsilon] = F(\varepsilon, Y^*(\varepsilon), Y^{*'}(\varepsilon)) - F(\varepsilon, \phi(\varepsilon,\varepsilon), \phi_x(\varepsilon,\varepsilon)) + \int_{\varepsilon}^{d} [F_y\,\phi_\varepsilon(x,\varepsilon) + F_{y'}\,\phi_{x\varepsilon}(x,\varepsilon)]\,dx \quad \ldots (1)$$

لكن $\phi_{\varepsilon x} = \phi_{x\varepsilon}$ ، وبالتكامل بالتجزئه نجد ان

$$\int_{\varepsilon}^{d} F_{y'}\,\phi_{\varepsilon x}(x,\varepsilon)\,dx = F_{y'}(x, \phi(x,\varepsilon), \phi_x(x,\varepsilon))\,\phi_\varepsilon(x,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon}^{d} - \int_{\varepsilon}^{d} (\phi_\varepsilon(x,\varepsilon)\,\frac{d}{dx}F_{y'})\,dx \quad \ldots (2)$$

ومن (1) ، (2) نجد ان

$$\delta J[\varepsilon] = \int_{\varepsilon}^{d} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\,\phi_\varepsilon(x,\varepsilon)\,dx + F_{y'}(x, \phi(x,\varepsilon), \phi_x(x,\varepsilon))\,\phi_\varepsilon(x,\varepsilon)\Big]_{\varepsilon}^{d} \quad \ldots (3)$$

لكن $Y(x) = y(c)$ ، $\phi_\varepsilon(x,\varepsilon) = \frac{Y'(\varepsilon) - y(\varepsilon)}{d-\varepsilon}(d-\varepsilon) + \frac{Y(\varepsilon) - y(\varepsilon)}{(d-\varepsilon)^2}(d-x)$

إذاً $\phi_\varepsilon(d,c) = 0$ ،

$$\phi_\varepsilon(c,c) = Y'(\varepsilon) - y(\varepsilon) \quad \ldots (4)$$

كما ان

$$\phi(x,a) = y(x) \text{ ، } \phi_x(x,a) = y'(x) \text{ ، لكل } x \in [c,d] \quad \ldots (5)$$

وعليه فإن بوضع $\varepsilon = c$ نجد ان (3) تصبح كالآتي :

$$F_{y'}(c, y(c), y'(c))\,[y'(c) - Y'(c)]$$

ومن (4) ، (5) ومعادله اويلر ـ لاجرانج " $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$ " نجد ان

$$g'(x) = F(c, Y(c), Y'(c)) - F(c, \phi(c,c), \phi_x(c,c)) - [Y'(c) - y'(c)]\,F_{y'}(c, y(c), y'(c)) \quad \ldots (6)$$

لكن $\phi(c,c) = y(c)$ ، $\phi_x(c,c) = y'(c)$ ، $Y(c) = y(c)$ ، $Y'(c) = P$ ،

إذاً من الشرط $\delta J(c) \geq 0$ والعلاقه

$$E(x,y,y',P) = F(x,y,P) - F(x,y,y') - (P - y')\, F_{y'}(x,y,y') \text{،}$$

والمعادله (6) ينتج ان

$$\delta J(c) = E(c, y(c),\ y'(c), P) \geq 0 \quad \text{لكل} \quad P \in \mathrm{R}$$

□

ملاحظه : اذا كان للدالي $J[y]$ قيمه عظمى محليه على $y(x)$ ، فإن

$$E(x,y,y',P) \leq 0 \quad \text{لكل} \quad P \in \mathrm{R}\,.$$

واخيراً الى المبرهنه الآتيه التي تحدد الشرط الكافي لوجود قيم قصوى محليه قويه

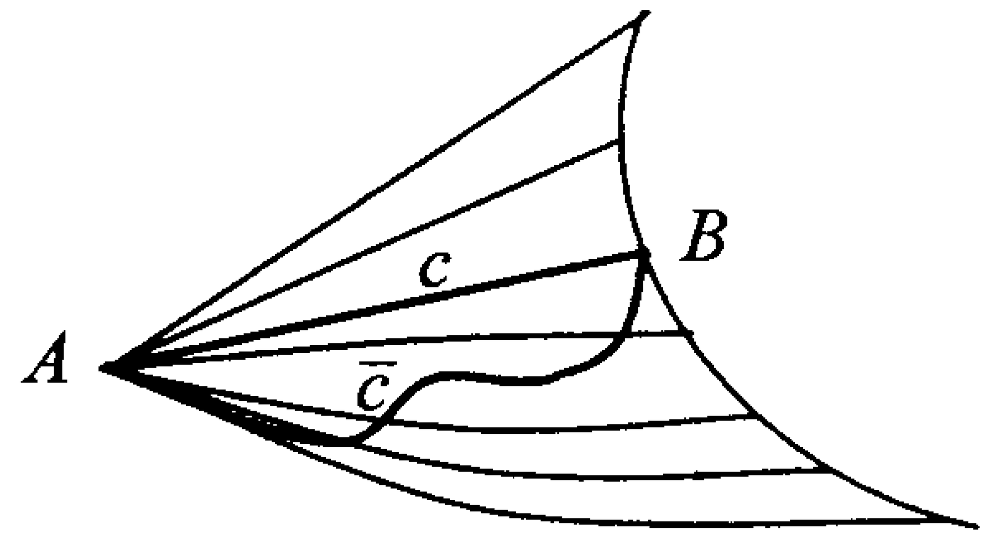
مبرهنه ٥ -٣ -٢:

إذا كان $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\ dx \in \ell_1$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$

وكان $[a,b]$ لا يحوي أي نقطه مرافقه للنقطه a و $E(x,y,y',P) > 0$ لكل $P \in \mathrm{R}$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمه صغرى محليه قويه على المنحني $y(x)$.

البرهان:

بما ان شرط جاكوبي متحقق ، إذاً يمكن احاطة منحني القيم القصوى المار بالنقطتين $A(a,y_a)$ ، $B(b,y_b)$ بمجال مركزي ميله $P = P(x,y)$ ، انظر شكل (٥ -٩) .



شكل (٥ -٩) .

والآن افرض ان

$$\Delta J = \int_{\bar{c}} F(x,y,y')\ dx - \int_{c} F(x,y,y')\ dx$$

حيث $\bar{c}$ منحني آخر يمر بالنقطتين A ، B قريباً من c . و اذا كان

$$K[y] = \int_{\bar{c}} [F(x,y,P) + (\frac{dy}{dx} - P)\ F_y(x,y,P')]\, dx$$

فإن $\int_{c} [F(x,y,y') = K[y]$ ، لأن $y' = \frac{dy}{dx} = P$ في هذه الحاله .

لكن $$K[y] = \int_{\bar{c}} [F(x,y,P) - PF_P(x,y,P')]\, dx + F_P(x,y,P')\ dy$$

عباره عن تكامل تفاضل تام (exact differential) للدالي $\bar{J}[x,y]$ التي حول لها الدالي $J[y(x)]$. إذاً

$$\delta \bar{J} = F_y(x,y,y')\ dy + [F(x,y,y') - y' F_y(x,y,y')]\, dx$$

وعليه وعلى المنحني c نجد ان

$$\int_{\bar{c}} [F(x,y,P) + (y' - P)\ F_P]\ dx = \int_{c} F(x,y,y')\ dx$$

وحيث ان $K[y]$ تكامل تفاضل تام ، إذاً $K[y]$ لا يعتمد على المسار الذي يؤخذ عليه التكامل " يسمى مثل هذا التكامل تكامل هلبرت اللامتغير Hilbert invariant integral " .

إذاً $\int_{c} F(x,y,y')\ dx = \int_{\bar{c}} [F(x,y,P) + (y'-P)\ F_P(x,y,P)]\ dx$

ليس على $c = \bar{c}$ فقط بل على أي اختيار للمسار $\bar{c}$ ، وعليه فإن

$$\Delta J = \int_{\bar{c}} F(x,y,y')\ dx - \int_{c} F(x,y,y')\ dx$$

$$= \int_{\bar{c}} F(x,y,y')\ dx - \int_{\bar{c}} [F(x,y,P) + (y'-P)\ F_P(x,y,P)]\ dx$$

$$= \int_{\bar{c}} [F(x,y,y') - F(x,y,P) + (y'-P)\ F_P(x,y,P)]\ dx$$

$$= \int_{\bar{c}} E(x,y,P,y')\ dx = \int_a^b E(x,y,P,y')\ dx$$

لكن $E(x,y,P,y') \geq 0$ يعني ان $\Delta J \geq 0$ ، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمه صغرى محليه على المنحني $y(x)$ ، اما اذا كان $E(x,y,y',P) > 0$ ، فإن $\Delta J > 0$ ، وعليه فإن للدالي قيمه صغرى محليه قويه على المنحني $y(x)$. □

ملاحظه: اذا تحقق شرط جاكوبي ، وكان $E(x,y,y',P) < 0$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمه عظمى محليه قويه على $y(x)$.

مثال ٥ -٣ -١:

ليكن $J[y] = \int n(x,y)\ \sqrt{1+y'^2}\ dx$

إذاً $F_{y'y'}(x,y,p) = \dfrac{n(x,y)}{(1+p^2)^{3/2}} > 0$ لكل $P \in \mathbb{R}$

وعليه فإن شرط فيراشتراس متحقق .

وبالتالي إذا أمكن إحاطة منحني القيم القصوى المار بنقطتين A ، B بمجال فانه يعطي الدالي قيمة صغرى قوية .

(١) إذا كانت $n(x,y) = y^{-1}$

فإن منحنيات القيم القصوى في نصف المستوى $y > 0$ تكون عبارة عن

أنصاف دوائر متعامدة مع 0x . وإذا لم تقع A ، B في نصف المستوى العلوي على خط مستقيم عمودي على 0x ، فإن منحنى واحد من هذه المنحنيات يمر بهاتين النقطتين ويمكن إحاطته بمجال .

(٢) إذا كانت $n(x,y) = \sqrt{y+h}$

فإن
$$J[y] = \int_a^b \sqrt{y+h}\,\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

حيث h عدد ثابت موجب .

وهنا نلاحظ أن الدالة F خاليه من x . إذن معادلة اويلر ـ لاجرانج تصبح على الشكل

$$\sqrt{y+h}\,\sqrt{1+y'^2} - \frac{\sqrt{y+h}\;y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

وعليه فإن

$$\frac{\sqrt{y+h}}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

بحل هذه المعادله بالنسبه الى y' ثم بالتكامل نحصل على الحل العام لمعادلة اويلر ـ لاجرانج ، وهو

$$y + h - c_1^2 = \left(\frac{x}{2c_1} + c_2\right)^2$$

وهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة .

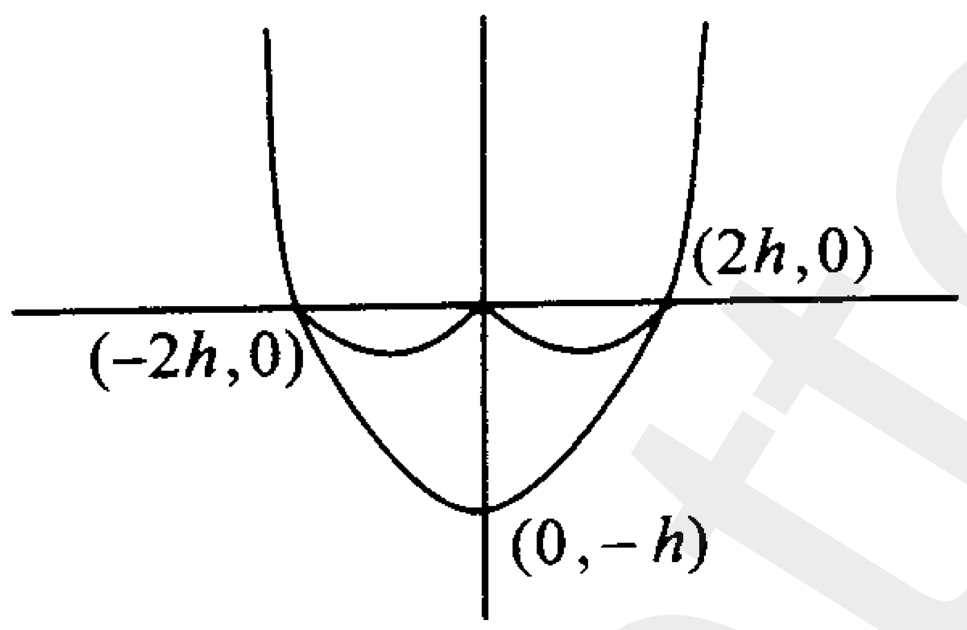
وإذاً وضعنا $c_1 = 0$ نحصل على مستقيمات موازية لمحور y0 كمنحنيات قصوى.

بنأخذ مجموعة المنحنيات القصوى المنبعثه من المبدأ . أي نأخذ الشرطين الابتدائيين $y(0) = 0$ ، $y'(0) = \alpha$

وبعد إيجاد c_1 ، c_2 من هذين الشرطين نحصل على

$$y = \frac{(1+\alpha^2)}{4h} x^2 + \alpha x$$

وهذه المعادلة تعطي , بعد الاشتقاق بالنسبة الى α وحذفها ، مغلف مجموعة القطاعات المكافئة . $y = \frac{x^2}{4h} - h$ ، وهذا قطع مكافئ رأسه $(0,-h)$ ومحوره $x = 0$. انظر الشكل (٥ -١٠) .



شكل (٥ -١٠)

ويتحقق شرط جاكوبي على الجزء ، من منحنى القيم القصوى ، واقع بين المبدأ وأية نقطة تسبق نقطة التماس لهذا القطع مع المغلف . وبالاضافة الى ذلك فإن شرط لجندر يتحقق أيضاً لأن

$$F_{y'y'} = \frac{\sqrt{y+h}}{(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

أي أنه يمكن إحاطة هذا الجزء من منحني القيم القصوى بحقل . كما أن هذا الجزء يعطي الدالي قيمة صغرى قوية .

مثال ٥ -٣ -٦:

ليكن
$$J[y] = \int_0^1 y'^3 \, dx$$

ونطرح مسألة رسم منحنى قيم قصوى يمر بين النقطتين $A(0,0)$ ، $B(1,1)$.

إن الحل العام لمعادلة اويلر ـ لاجرانج هو

$$y = c_1 x + c_2$$

لكن $y(0)=0$ ، $y(1)=1$ ، إذاً $y = x$ ، وعليه فإن $F_{yy} = F_{yy'} = 0$ ، $F_{y'y'} = 6y'$ ، وبالتالي فإن $F_{y'y'} = 6 > 0$ على المستقيم $y = x$ ، ومن ثم فإن شرط لجندر يتحقق.

وتصبح معادلة جاكوبي $h' = c$ وحلها $h(x) = x$ حيث $h'(0) = 1$ ، $h(0) = 0$ إذاً شرطي لجندر و جاكوبي يتحققان على طول القطعة المستقيمة AB من مستقيم القيم القصوى $y = x$ وهذه القطعة تعطي الدالي قيمة صغرى ضعيفة كما أن دالة فيراشتراس تصبح :

$$E(x, y, y', p) = p^3 - y'^3 - 3(p - y')\, y'^2$$

وعلى طول المستقيم $y = x$ نجد ان

$$E(x, y, y', p) = p^3 - 3p + 2$$

وعندما $p < -2$ ، نجد ان $E(x, y, y', p) < 0$ ، وهذا يعني عدم تحقق الشرط $E > 0$ ، وعليه فإن المستقيم $y = x$ لا يعطي قيمه صغرى قويه .

<u>ملاحظه:</u> قد يكون من الصعب تحديد اشارة

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, p) - F(x, y, y') - (p - y')\, F_{y'}(x, y, y')$$

لذلك نستخدم مفكوك تايلور للحدين $F(x, y, p) - F(x, y, y')$ حتى حدود الدرجه الثانيه في $(p - y')$ ، فيمكننا التعبير عن داله فيرشتراس ، كالآتي

$$E = E(x, y, y', p) = \frac{1}{2}(p - y')^2\, F_{y'y'}(x, y, \alpha)$$

حيث $\alpha \in (p - y')$ ، ومن ثم $E \geq 0$ اذا واذا فقط $F_{y'y'}(x, y, \alpha) \geq 0$ ،وعليه فإن الشرط الكافي لوجود قيم صغرى محليه قوه للدالي $J[y]$ على المنحني $y(x)$ هو امكانيه احاطة $y(x)$ بحقل تتحقق عند كل نقطه من نقاطه المتراجحه $F_{y'y'} > 0$.

مثال ٥ -٣ -٧:

حدد نوع القيم القصوى للدالي

$$J[y] = \int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy')\,dx \text{ ، } y(0) = 0 \text{ ، } y(a) = b \text{ ، } a > 0 \text{ ، } b > 0 .$$

الحل

بما ان $F = F(y, y') = 6y'^2 - y'^4 + yy'$

اذاً معادله اويلر - لاجرانج هي

$$F - y' F_{y'} = c_1$$

وعليه فإن $3y'^4 - 6y'^2 = c_1$ **، ومنها نجد ان** $y' = c$ **وعليه فإن** $y = cx + d$.

لكن $y(0) = 0$ **، اذاً** $y = cx$ **، وحيث** $y(a) = b$ **، إذاً** $c = \dfrac{b}{a}$ **، وعليه فإن** $y = \dfrac{b}{a} x$

وهو محتوى في عائله المستقيمات $y = cx$ **التي تشكل مجالاً مركزياً . لكن**

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, p) - F(x, y, y') - (p - y')\, F_{y'}(x, y, y')$$

$$E(x, y, y', p) = 6p^2 - p^4 - yp - 6y'^2 + y'^4 - yy' - (p - y')(12y' - 4y'^3 - y)$$

$$= 6p^2 - p^4 - 6y'^2 - 3y'^4 - 12py' - 4py'^3$$

اذاً من الصعب تحديد اشاره E **، لذلك نستخدم الملاحظه اعلاه ، فنجد ان**

$$E = E(x, y, y', p) = \frac{1}{2}(p - y')^2\, F_{y'y'}(x, y, \alpha)$$

لكن $F_{y'y'} = 12(1 - y'^2)$ **، إذاً** $F_{y'y'}(x, y, \alpha) = 12(1 - \alpha^2)$ **وعليه فإن** $F_{y'y'} = 0$ **يعني أن** $\alpha = \mp 1$ **. إذاً** $F_{y'y'} > 0$ **لكل** $0 < \dfrac{b}{a} = \alpha < 1$ **، وعليه توجد قيمه صغرى محليه للدالي** $J[y]$ **. لكن** $F_{y'y'} < 0$ **لكل** $\alpha > 1$ **، اذاً** $E < 0$ **لكل** $\alpha > 1$ **وعليه فإن للدالي قيمه عظمى محليه .**

تمارين

(١) احسب $\delta^2 J$ لكل مما يأتي

(ا) $J[y]=\int_a^b x^2 y'^3\, dx$.

(ب) $J[y]=\int_a^b (y^2+y'^2-2y\,Sin\,x)\, dx$.

(٢) اذا كان $J[y]=\int_0^1 (y^2+y^3)\, dx \in \ell[0,1]$ ، فاثبت ان $y(x)=0$ قيمه صغرى محليه للدالي $J[y]$ ، بينما $y(x)=\frac{-2}{3}$ ، $0\le x\le 1$ قيمه عظمى محليه للدالي $J[y]$.

(٣) اذا كان $J[y]=\int_0^1 (y^2-y'^4)\, dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$

فأثبت ان $\delta J(0,\Delta y)=0$ لكل Δy بينما $\delta^2 J(0,\Delta y)>0$.

(٤) هل يتحقق شرط جاكوبي على كل مما يأتي :

(ا) $J[y]=\int_0^1 (y'^2+y')\, dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$.

(ب) $J[y]=\int_0^b (x^2+y^2+y'^2)\, dx$.

(جـ) $J[y]=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx$.

(د) $J[y]=\int_a^b (y'^2-\alpha^2 y^2)\, e^{2y}\, dx$ ، $\alpha>1$.

(٥) هل يتحقق شرط جاكوبي الموسع على الدالي :

$J[y]=\int_0^a (y'^2+y^2+x^2)\, dx$ ، $y(0)=y(a)=0$

(٦) اوجد القيم القصوى وحدد نوعها في كل مما يأتي :

(أ) $J[y]=\int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(a)=b$.

(ب) $J[y]=\int_0^2 (xy'+y'^2)\,dx$ ، $y(0)=1$ ، $y(2)=0$.

(جـ) $J[y]=\int_0^a (y'^2+2yy'-16y^2)\,dx$ ، $a>0$ ، $y(0)=y(a)=0$.

(د) $J[y]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')\,dx$ ، $y(-1)=y(2)=1$.

(٧) اوجد المنحني المار بالنقطتين $(-1,-1)$ ، $(1,1)$ والذي يجعل للدالي $J[y]=\int_{-1}^1 (x^2y'^2+12y^2)\,dx$ قيمه صغرى .

(٨) اوجد معادلة المنحني المار بالنقطتين $(1,3)$ ، $(2,5)$ والذي يجعل الدالي $J[y]=\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx$ يملك قيمه صغرى .

(٩) حدد نوع القيم القصوى في كل مما يأتي :

(أ) $J[y]=\int_0^{\pi/4} (4y^2-y'^2+8y)\,dx$ ، $y(0)=-1$ ، $y(\pi/4)=0$.

(ب) $J[y]=\int_1^2 (x^2y'^2+12y^2)\,dx$ ، $y(1)=1$ ، $y(2)=8$.

(جـ) $J[y]=\int_0^1 (y'^2+y^2+2ye^{2x})\,dx$ ، $y(0)=\frac{1}{3}$ ، $y(1)=\frac{1}{3}e^2$.

(د) $J[y]=\int_0^a \frac{y}{y'^2}\,dx$ ، $y(0)=1$ ، $y(a)=b$ ، $0<b<1$ ، $a>0$.

(هـ) $J[y]=\int_0^a \frac{dx}{y'}\,dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(a)=b$ ، $a,b>0$.

و) $J[y]=\int_0^a \frac{dx}{y'^2}\, dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(a)=b$ ، $a,b>0$.

ز) $J[y]=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\, dx$ ، $y(1)=1$ ، $y(2)=4$.

ح) $J[y]=\int_1^3 (12xy+y'^2)\, dx$ ، $y(1)=0$ ، $y(3)=26$.

ط) $J[y]=\int_0^{\pi/4} (y^2-y'^2+6y\,Sin(2x))\, dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{4})=1$.

ي) $J[y]=\int_0^2 (y^2+y'^2-2xy)\, dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(2)=3$.

(١٠) اثبت بتحقيق شرط جاكوبي ان للدالي

$$J[y]=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\; dx \quad ، \quad y(0)=0 \quad ، \quad y(1)=1$$

قيمه صغرى على المستقيم $y=x$.

(١١) اثبت ان منحني القيم الصغرى للدالي

$$J[y]=\int_0^1 (y'^2+y')\, dx \quad ، \quad y(0)=0 \quad ، \quad y(1)=1$$

يحقق الشروط الضروريه لكل من لجندر، جاكوبي وفيرشتراس .

الفصل السادس

التحكم الأمثل "Optional Control"

تهتم نظريه التحكم الامثل "Optional Control Theory" بدراسة القيم القصوى للداليات ، التي تعتمد على متغيرات تحكم (Control Variable) منتميه الى مجموعه من الدوال تحقق شروطاً معينه ، وسنركز اهتمامنا ي هذا الفصل على دراسة المسائل البسيطه للتحكم الأمثل ويظم ، اربعه بنود تناولنا في الأول منها كيفية صياغة المسأله وربط الضوابط وتجميع التكاليف ، وتناول في البند الثاني ، التكلفه المثلى ومبدأ الأمثليه لبلمان وبعض تطبيقاته ، وتناولنا في البند الثالث الشروط الضروريه للتحكم الامثل ، اما في البند الأخير فقد درست قاعدة القيمه العظمى لبونترياجن وبعض تطبيقاتها .

٦-١ صياغة المسأله وربط الضوابط وتجميع التكاليف

في كثير من المسائل الهندسيه ، والتحكم بالصواريخ والأقتصاد وإدرة الأعمال يكون الهدف المطلوب تحديد القيم القصوى للداليات من الشكل

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F[t,X(t),U(t)]\ dt \text{ ،}$$

حيث $X(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))\in \mathbb{R}^n$ ، $U(t)=(u_1(t),\dots,u_m(t))\in \mathbb{R}^m$

والتي تحقق شروطاً معينه تتضمن معادلات تفاضليه على الصوره

$$X_i'(t)=\frac{dX_i}{dt}=g_i(t,X(t),U(t)) \text{ ،}\quad i=1,\dots,n \text{ ،}\quad x_i=x_i(t) \text{ ،}$$

$u_j=u_j(t)$. وفي كثير من التطبيقات تمثل t الزمن ، t_0 الزمن الابتدائي ، t_1 الزمن النهائي ، اما $X(t)$ فتسمى داله الوضع او الحاله (state function) ،

وتسمى $U(t)$ داله التحكم (control function) ، اما المعادلات التفاضليه $X_i'(t) = g_i(t, X(t), U(t))$ والشروط الاخرى ، فتخدم سلوك داله الوضع في حاله تحديد داله التحكم ، اما J فتمثل الكلفه او الانتاج المطلوب تقليلها او تكثيرها بالنسبه للمعطيات . وإذا كان

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, X(t), U(t)]\, dt \text{ ، } X(t) \in \mathbb{R}^n \text{ ، } U(t) \in \mathbb{R}^m \text{ ،} \quad \dots (1)$$

$$X'(t) = g(X(t), U(t)) \text{ ، } X(t_0) = x_0$$

Autonomous

فيسمى النظام (1) نظاما ذاتيا (Autonomous System) ويسمى التحكم تحكماً بسيطاً .

مثال ٦ -١ -١:

اذا كانت $F(t, X(t), U(t)) = X^2 + U^2$ ، $g(t, X(t), U(t)) = \alpha X + \beta U$

حيث α, β ثوابت ، فإن

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (X^2 + U^2)\, dt \text{ ، } X'(t) = \alpha X(t) + \beta U(t) \text{ ، } X(t_0) = x_0$$

مثال ٦ -١ -٢:

اذا كانت $F(t, x, u) = x^2 \, Cos^2\, u$ ، $x'(t) = g(t, x, u) = \frac{1}{2}\, Sin\, U(t)$ ، $0 < t < \pi$ ،

$x(0) = \frac{\pi}{2}$ فإن

$$J[u] = \int_{0}^{\pi} x^2(t)\, Cos^2\, u(t)\, dt \text{ ، } x'(t) = \frac{1}{2}\, Sin\, u(t) \text{ ، } x(0) = \frac{\pi}{2}$$

مثال ٦ -١ -٣:

يراد زياده ارباح شركه خلال فتره زمنيه معينه من t_0 الى t_1 ، ويوجد في تلك

الشـركـه كميـه مـن المـال وعوامـل انتـاج آخـرى ، وبأهمـال بقيـة عوامـل الإنتـاج والتفكير في مصدر الربح (رأس المال) والذي يرمز له بالرمز $M(t)$، والتعبير عن معدل الأنتاج في اللحظه t بالرمز $U(t)$. نجد ان الربح يعتمد على كميه رأس المال ومعدل الأنتاج والذي يرمز له في هذه الحاله بالرمز $F\left(t,M(t),U(t)\right)$، وحيث ان معدل الأنتاج يعتمد على الزمن t . اذاً اتخاذ القرار يتغير بتغير الزمن ، مما يجعل رأس المال متغير ايضاً ، وعليه فان $M' = \dfrac{dM}{dt} = g(t,M,U)$، وتصبح المسأله في هذه الحاله هي ايجاد اكبر قيمه للدالي :

$$M' = F(t,M,U) \text{ ، } J[U] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t,M(t),U(t)\right)\, dt$$

والآن الى بعض التعاريف المفيده ، التي تحدد بعض خواص داله التحكم والدوال المعتمده عليها .

تعريف ٦ -١ -١ :

يقال عن داله التحكم $u:[\bar{t}_0,\bar{t}_1] \to \mathrm{R}^m$ ، انها مقبوله او مسموح بها (Admissible) ، اذا كانت

(أ) معرفه ومتصله مقطعياً (Piecewise continuous) على $[\bar{t}_0,\bar{t}_1]$

(ب) $u(t) \in U$ لكل $t \in [\bar{t}_0,\bar{t}_1]$، حيث $U \subseteq \mathrm{R}^n$ تصف مجموعه القيود (Constraint Set).

لاحظ ان استخدام التحكم المقبول (Admissible Control) ، يثبت ان الشرط الأبتدائي $x(t_0) = x_0$ ، $t_0 \in [\bar{t}_0,\bar{t}_1]$ يجعل المعادله $X'(t) = g\left(x(t), u(t)\right)$ تملك حلاً وحيداً ممهداً مقطعياً (Piecewise X Smooth Solution) ، حيث

$$X:[t_0,t_1] \to \mathrm{R}^n \text{ ، } X(t_0) = x_0 \text{ ، } [t_0,t_1] \subset [\bar{t}_0,\bar{t}_1]$$

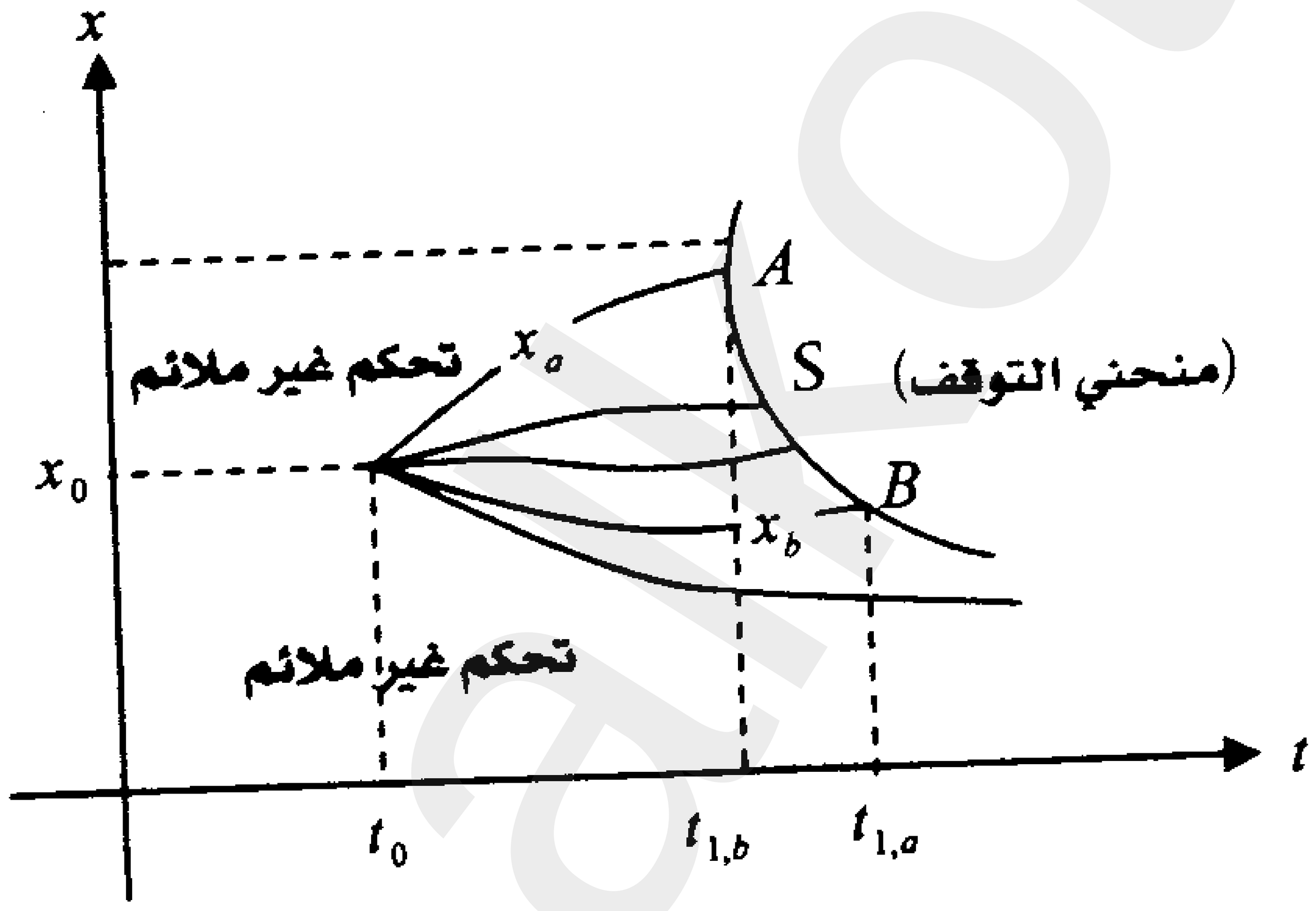
والآن لنركز اهتمامنا على المسائل التي يكون فيها الشرط الأبتدائي معلوم ،

بينما الشرط النهائي ينتمي الى مجموعه جزئيه B " يطلق عليها مجموعه الهدف Target Set " من R^n . إذاً $X(t_0) = x_0$ ، $X(t_1) \in B$.

تعريف ٦ -١ -٢:

يقال عن تحكم $U:[t_0, t_1] \to R^m$ ، انه تحكم ملائم او عملي "Feasible Control" عند النقطه x_0 ، اذا كان U تحكماً مقبولاً ، ويولد الحل $X:[t_0, t_1] \to R^n$ بحيث ان $X(t_0) = x_0$ ، $X(t_1) \in B$.

وحيث ان لكل قيمه ابتدائيه $X(t_0) = x_0$ ، يكون للنظام $X'(t) = g(X(t), U(t))$ حلاً محدوداً ، يطلق عليه المسار (Trajectory) او متجه الوضع ، وحيث ان $X(t_0) = x_0$ تعطى دائماً ويطلب تحديد $x_1 = X(t_1)$ خلال او على سطح S يسمى السطح النهائي او سطح التوقف (Terminal Surface) ، وهو مجموعه جزئيه من الفضاء الأقليدي R^{n+1} ، وعندما $m = n = 1$ نجد ان S تمثل منحنياً ، مثل المنحني في شكل (٦ -١) وتحدد S العلاقه بين $X(t)$ و t عند $t = t_1$.



شكل (٦ -١)

ويقال عن عمليه تحكم انها مثلى صغرى ، اذا كان $J[u^*] \le J[u]$ لكل $u \in U$ ،

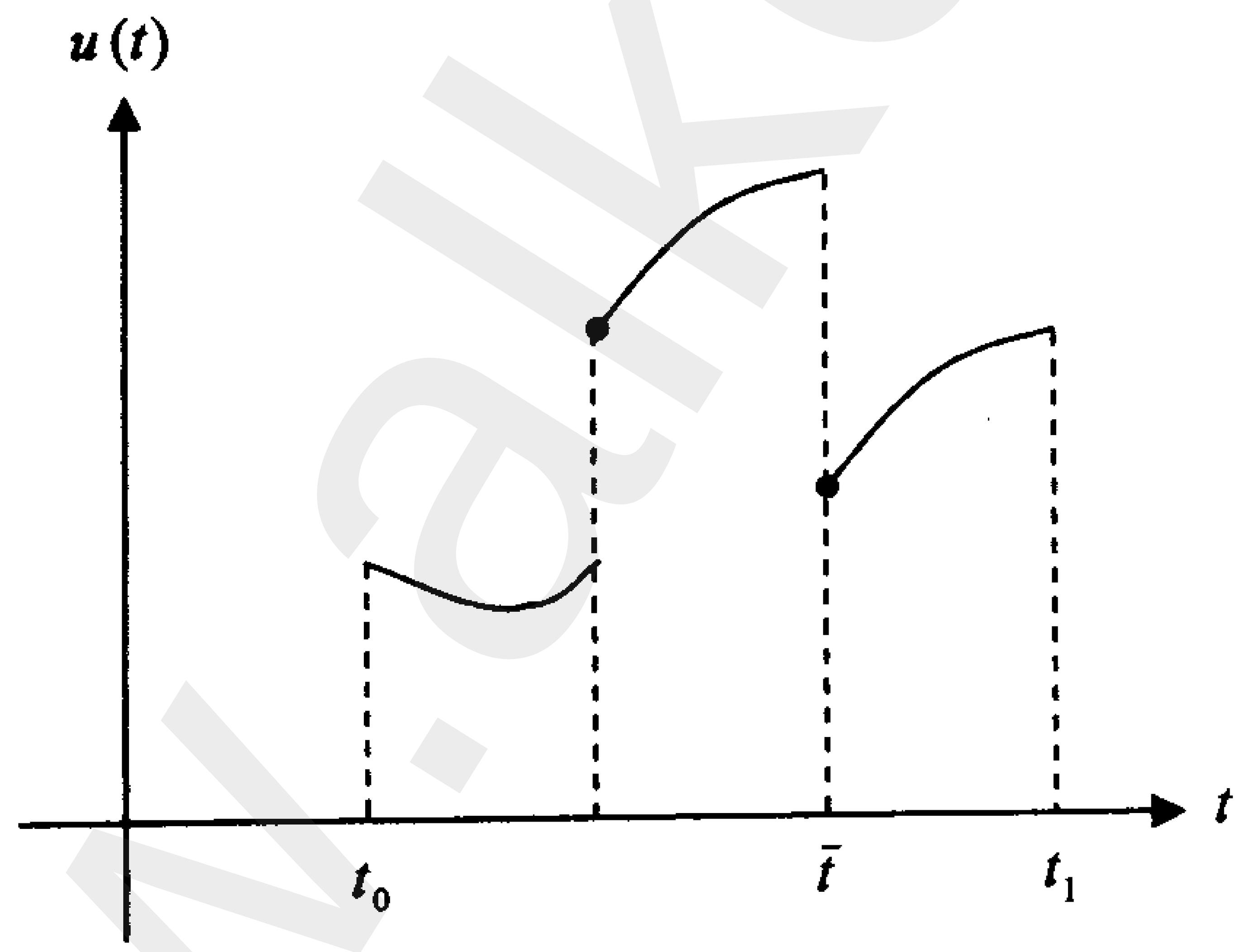
ويقال عن عمليه تحكم انها مثلى عظمى اذا كان $J[u] \le J[u^*]$ ، لكل $u \in U$ ،

ويسمى المسار المقابل او المصاحب لتلك العمليه ، المسار الأمثل (Optimal trajectory). وفي الشكل (٦ -١) ، نجد انه اذا كانت x_a هو المسار الأمثل فإن A هي نقطه النهايه ، $t_{1,a}$ الزمن النهائي ، اما اذا كان x_b مساراً امثلاً ، فإن B نقطه النهايه و $t_{1,b}$ الزمن النهائي ، وكلا النقطتين A ، B تقعان على منحني التوقف S .

والآن الى تعريف ربط تحكمين .

تعريف ٦ -١ -٢:

يقال عن تحكم مقبول $u:[t_0,t_1] \to \mathrm{R}^m$ ، انه اتحاد او رابط (Joining) لتحكمين مقبولين $v:[t_0,\bar{t}] \to \mathrm{R}^m$ ، $\omega:[\bar{t},t_1] \to \mathrm{R}^m$ ، اذا كان $u(t) = v(t)$ لكل $t \in [t_0,\bar{t}]$ و $u(t) = \omega(t)$ لكل $t \in [\bar{t},t_1]$. انظر الشكل (٦ -٢) ،



شكل (٦ -٢)

والآن $v:[t_0,\bar{t}] \to \mathrm{R}^m$ تحكماً مقبولاً ، مولداً للحل $y:[t_0,\bar{t}] \to \mathrm{R}^n$ ، تكلفته

المناظره $J[v]$، $\omega:[\bar{t},t_1]\to \mathrm{R}^m$ تحكماً مقبولاً مولداً للحل $z:[\bar{t},t_1]\to \mathrm{R}^n$، تكلفته المناظره $J[\omega]$، حيث $y(t_0)=y_0$، $z(\bar{t})=y(\bar{t})$، وكان $u:[t_0,t_1]\to \mathrm{R}^m$ تحكماً مقبولاً، تكلفته $J[u]$ ومعرفاً بربط التحكمين ω ، v ، والمولد للحل $X:[t_0,t_1]\to \mathrm{R}^n$، $X(t_0)=x_0$، حيث $X(t)=y(t)$ لكل $t\in[t_0,\bar{t}]$ ، $X(t)=z(t)$ لكل $t\in[\bar{t},t_1]$ ، فإن $J[u]=J[v]+J[\omega]$ ، أي ان التكلفه الكليه تساوي مجموع التكاليف .

٦ -٢ : قاعده الأمثليه وبعض تطبيقاتها

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على اثبات قاعده او مبدأ الأمثليه (Optimality Principle) لبلمان، ودراسه بعض تطبيقاته كاشتقاق معادله بلمان والحصول منها على معادله هاملتون، وللوصول الى ذلك نفرض ان

$$E=\{\, x_0\in \mathrm{R}^n \mid \quad \text{يوجد تحكم عملي عند } x_0 \,\}$$
$$E^*=\{\, x_0\in \mathrm{R}^n \mid \quad \text{يوجد تحكم مقبول عند } x_0 \,\}$$

إذاً $E^*\subseteq E$ لأن الأمثليه تعني امكانية العمل، وعليه فإن $E^*\neq 0$. والآن لنفرض ان $u^*:[t_0,t_1^*]\to \mathrm{R}^m$ تحكم امثل عند x_0 ، يولد الحل $x^*:[t_0,t_1^*]\to \mathrm{R}^n$ ، $x^*(t_0)=x_0$، ولتكن $J^*=[x_0,u^*,x^*]$ التكلفه المثلى (optimality control function) حيث $x_0\in E^*$. إذاً اذا كانت التكلفه المثلى قصوى فإن $J[x_0,u^*]$ يكون وحيداً، وبالتالي فإن $J^*:E^*\to \mathrm{R}$.

والأن الى قاعده الأمثليه لبلمان والتي تنص على انه بصرف النظر عن القرارات المتخذه للدخول الى أي حاله معينه في أي مرحله معينه تكون القرارات المتبقيه مثلى لتلك المرحله .

مبرهنه ٦ -٢ -١: "مبدأ الأمثليه لبلمان"

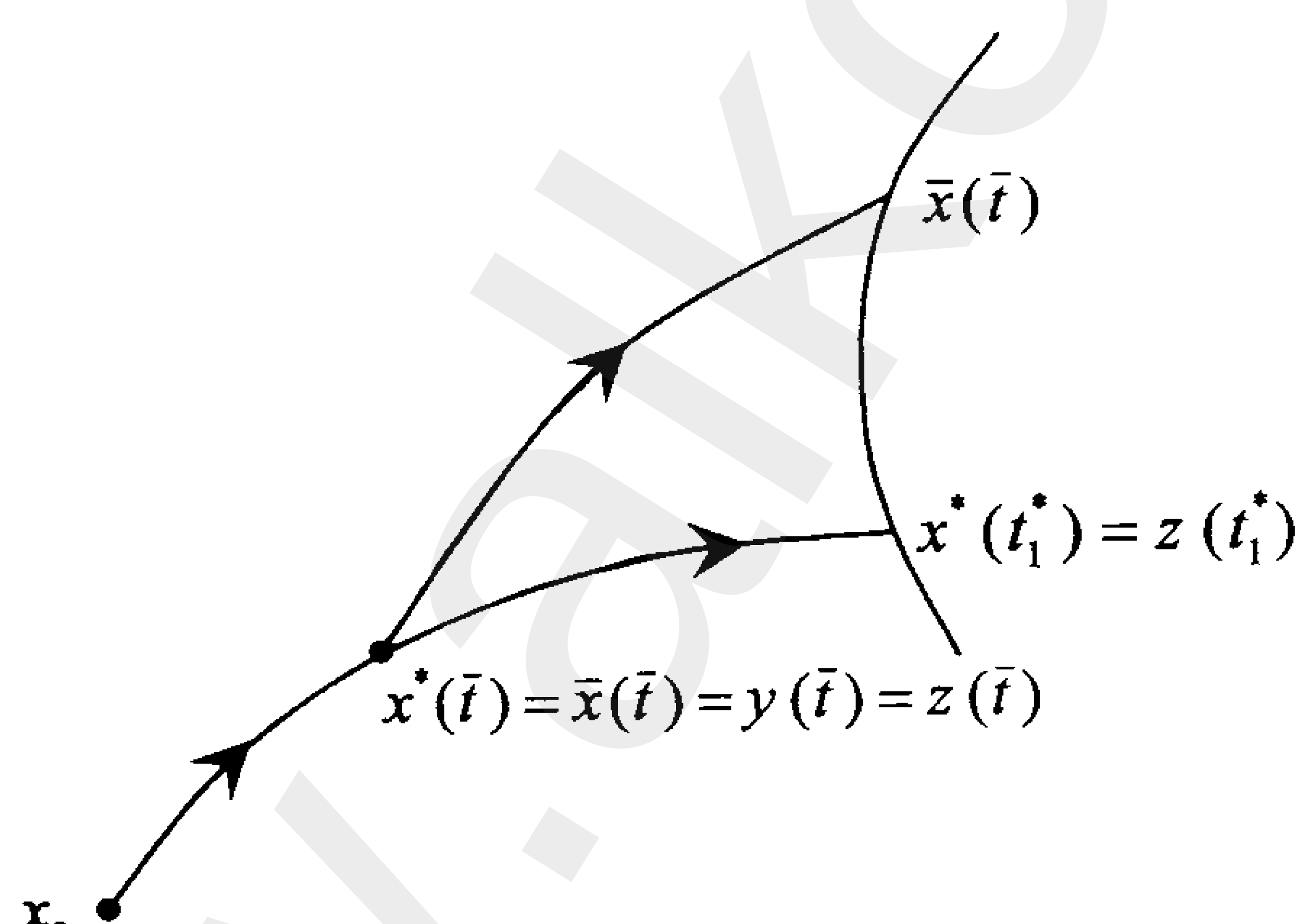
اذا كان $u^*:[t_0,t_1^*]\to \mathrm{R}^m$ ، تحكماً امثلاً اصغراً او اكبراً عند x_0 ، ومولداً للحل $x^*:[t_0,t_1^*]\to \mathrm{R}^n$ ، $x^*(t_0)=x_0$ ، فإن تقييد او قصر u^* على الفتره $[\bar{t},t_1^*]$ يكون تحكماً امثلاً عند $x^*(\bar{t})$ ، حيث $\bar{t}\in[t_0,t_1^*]$.

البرهان:

سنثبت المبرهنه عندما u^* تحكم امثل أصغر، لان الأثبات في الحاله الأخرى مشابه .

بما ان
$$J[x_0,u^*]=J[x_0,v,y]+J[x_0(\bar{t}),\omega,z]$$

حيث $v(t)=u^*(t)$ ، $y(t)=x^*(t)$ لكل $t\in[t_0,\bar{t}]$ ، $\omega(t)=u^*(t)$ ، $z(t)=x^*(t)$ لكل $t\in[\bar{t},t_1^*]$ اذا كان u^* متصلاً عند $t=\bar{t}$ ، اما اذا كان u^* غير متصل عند $t=\bar{t}$ ، انظر الشكل (٦ -٣) ،



شكل (٦ -٣)

فأفرض ان

$$v(\bar{t})=\lim_{t\to\bar{t}-}u^*(t)=u^*(\bar{t}-)\ ،$$

$$\omega(\bar{t})=\lim_{t\to\bar{t}+}u^*(t)=u^*(\bar{t}+)$$

والآن لنفرض ان ω ليس تحكم امثل عند $x^*(\bar{t})$ ، إذاً يوجد تحكم مقبول $\bar{u}:[\bar{t},\bar{t}_1] \to R^m$ عند $x^*(\bar{t})$ مولد للحل $\bar{x}:[\bar{t},\bar{t}_1] \to R^n$ ، $\bar{x}(\bar{t}) = x^*(\bar{t})$ ، $\bar{x}(\bar{t}_1) \in B$ ، بحيث ان

$$J[x^*(\bar{t}),\bar{u},\bar{x}] < J[x^*(\bar{t}),\omega,z]$$

وبربط $\bar{u}$ ، v نحصل على تحكم مقبول عند x_0 ، وليكن $u:[t_0,\bar{t}_1] \to R^m$ ، يولد الحل $x:[t_0,\bar{t}_1] \to R^n$ و $x(t_0) = x_0$ و $x(t) = y(t)$ ، $x(t) = \bar{x}(t)$ لكل $t \in [\bar{t},\bar{t}_1]$ لكن التكلفه الكليه تساوي مجموع التكاليف إذاً $J[x_0,u,x] < J[x_0,u^*,x^*]$ وهذا تناقض ، لأن التحكم هو تحكم امثل اصغر عند x_0 . إذاً $\omega(t) = u^*(t)$ ، لكل $t \in [t_0,t_1^*]$ ، وعليه فإن ω تحكم امثل اصغر عند $x^*(\bar{t})$ و $\bar{t} \in [t_0,t_1^*]$.

□

والآن الى بعض تطبيقات قاعدة الأمثليه ، واستخدام حساب التغيرات للحصول على معادله بلمان ، واشتقاق معادله هاملتون منها ، وعليه ، اذا كان المطلوب ايجاد القيمه العظمى للتحكم :

$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)\ dt$ ، حيث $x' = g(x,x(t),u(t))$ ، $x(t_0) = x_0$ وفرضنا ان $\bar{J} = \max_{u \in U} J[u]$ ، وبدلنا t_0 بالمتغير t ، فإن

$$\bar{J}(x,t) = \max_{u \in U} J[t,u] = \int_{t}^{t_1} F(t,x,u)\ dt$$

ويكون $\max_{u \in U} J[u] = \bar{J}(t_0,x_0)$. لكن

$$\bar{J}(t,x) = \max_{u \in U} [\int_{t}^{t+\Delta t} F(t,x,u)\ dt + \int_{t+\Delta t}^{t_1} F(t,x,u)\ dt]$$

وحسب قاعده الأمثليه نجد ان

$$\bar{J}(t+\Delta t\ ,\ x+\Delta x) = \max_{u \in U} \int_{t+\Delta t}^{t_1} F(t,x,u)\ dt]$$

وبالتالي فإن

$$\bar{J}(t,x) = \max_{u \in U} [\int_t^{t+\Delta t} F(t,x,u)\ dt + \bar{J}(t+\Delta t, x+\Delta x)]$$

واذا كانت Δt صغيره جداً ، فإن

$$\int_t^{t+\Delta t} F(t,x,u)\ dt = F(t,x,u)\cdot \Delta t$$

وعليه فإن

$$\bar{J}(t,x) = \max_{u \in U} \left[F\cdot \Delta t + \bar{J}(t+\Delta t, x+\Delta x)\right]$$

وباستخدام متسلسله تايلور ، نجد ان

$$\bar{J}(t+\Delta t, x+\Delta x) = \bar{J}(t,x) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\Delta x + \cdots$$

وعليه فإن

$$\bar{J}(t,x) = \max_{u \in U} [F\cdot\Delta t + \bar{J}(t,x) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\Delta x + \cdots] ،$$

ومنها نجد ان

$$\max_{u \in U} [F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \cdots] = 0$$

لكن $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) = g(t,x,u)$ ، إذاً

$$-\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \max_{u \in U} [F(t,x,u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot g(t,x,u)] \qquad \ldots (1)$$

وتعـرف المعادلـه (1) ، بمعادلـه بلمـان (Bellman's Equation) . ويمكننـا الآن استنتاج معادله هاملتون من معادله بلمان كالآتي :

نفرض ان $u = x'$ ، اذاً بالتعويض في (1) ينتج ان

$$\max_{x'} [F(t,x,u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}] = 0 \qquad \ldots (2)$$

وبأخذ المشتقه الجزئيه بالنسبه الى x' لكل حد داخل القوس في المعادله (2) ، ينتج ان

$$\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} = 0 \qquad \dots (3)$$

وعليه فإن

$$F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \qquad \dots (4)$$

وحيث ان $\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}) = 0$ ، إذاً

$$\frac{d}{dt}(F_{x'}) + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \dots (5)$$

لكن $0 = (F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial J}{\partial t})\frac{\partial}{\partial x}$ ، إذاً

$$F_x + F_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \, \partial x} = 0$$

ومنها نجد ان

$$F_x + (F_{x'} + \bar{J}_x) \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \, \partial x} = 0 \qquad \dots (6)$$

ومن (3) ، (6) ينتج ان

$$F_x + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \, \partial x} = 0$$

وعليه فإن

$$\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \, \partial x} = -F_x \qquad \dots (7)$$

ومن (5) ، (7) ينتج ان

$$F_x - \frac{d}{dx} F_{x'} = 0$$

وهي معادله اويلر ـ لاجرانج ، لكن

$L = \int_{t_0}^{t_1} (H + \lambda' x)\, dt - (\lambda_1 x_1 - \lambda_0 x_0)$ ، $\lambda(t_0) = \lambda_0$ ، $\lambda(t_1) = \lambda_1$ ،

$x(t_0) = x_0$ ، $x(t_1) = x_1$ و $\bar{L} = \bar{J}$ عند القيمة القصوى ، وعليه فإن

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x_0} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_0} = \bar{\lambda}_0 \qquad \dots \ (8)$$

وحسب قاعدة بلمان للأمثليه ، يمكن حذف نقطة البدايه ، وعندما تكون u في نهايتها العظمى ، يكون

$$H(t,x,u,\lambda) = F(t,x,u) + \lambda\, g(t,x,u)$$
$$= F(t,x,u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot x' \qquad \dots \ (9)$$

وتصبح معادلة بلمان كالآتي

$$\frac{-\partial \bar{J}}{\partial t} = H(t,x,u,\frac{\partial \bar{J}}{\partial x}) \qquad \dots \ (10)$$

والمعادلة (10) هي معادلة هاملتون – جاكوبي ، إذاً

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-\partial \bar{J}}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial x}(H(t,x,u,\frac{\partial \bar{J}}{\partial x}))$$

وبالتالي فإن

$$\frac{-\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\right) = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2}$$

وعليه فان

$$\frac{-\partial H}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \qquad \dots \ (11)$$

ويتفاضل طرفي المعادلة (8) بالنسبة إلى t ، ينتج ان

$$\lambda' = \frac{d}{dt}(\frac{\partial \bar{J}}{\partial x}) = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t}\cdot\frac{dt}{dt} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2}\cdot x' \qquad \dots \ (12)$$

ومن (9) نجد أن $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t,x,u) = x'$ ، لكن $\bar{J}$ قابلة للاشتقاق مرتين ومتصله ، إذاً

$$\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x}$$

وعليه ومن (11) ، (12) ينتج أن

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad ، \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x'$$

وهي معادلات هاملتون .

٦ -٣ : الشروط الضرورية للتحكم الأمثل

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على تحديد $x(t)$ المتولده من دالة التحكم $u(t)$ والتي تجعل الدالي $J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt$ حيث $x'(t) = g(t,x,u)$ ، $x(t_0) = x_0$ ، $t_0 < t < t_1$ يملك قيمة قصوى . أي أننا نحسب التحكم الأقصى ، ولحساب ذلك ، نفترض أن

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t,u), u(t)] \; dt \qquad \ldots \; (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} x(t,u) = g(t, x(t,u), u(t)) \\ x(t_0,u) = x_0 \end{array}\right\} \quad t > t_0 \; ، \qquad \ldots \; (2)$$

و u قيمة قصوى (صغرى) للدالي J ، إذاً $\delta J[u,\Delta u] = 0$ ، لكل الدوال المتصلة Δu لكن

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon \Delta u) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t, u + \varepsilon \Delta u), u(t) + \varepsilon \Delta u(t)] \; dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F[t, x(t, u + \varepsilon \Delta u), u(t) + \varepsilon \Delta u(t)] \; dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_X[t, x(t, u + \varepsilon \Delta u), u + \varepsilon \Delta u] \frac{\partial}{\partial x} x(t, u + \varepsilon \Delta u)$$

$$+ F_U[t, x(t, u + \in \Delta u), u + \in \Delta u] \Delta u$$

حيث $X = x(t, u + \varepsilon \Delta u)$ ، $X = u(x) + \varepsilon \Delta u(x)$ ، لكن

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} X(t,u+\varepsilon\Delta u)|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X(t,u+\varepsilon\Delta u)-X(t,u)}{\varepsilon} \qquad \dots (3)$$
$$= X'(t,u)$$

إذاً

$$\delta J(u,\Delta u)=\int_{t_0}^{t_1}\{F_X[t,x(t,u),u(t)]\frac{\partial}{\partial\varepsilon}X(t,u+\varepsilon\Delta u)|_{\varepsilon=0}+F_U[t,x(t,u),u(t)]\Delta u(t)\}dt \dots (4)$$

لكل الدوال المتصله Δu ، $X = X(t,u)$ تحددها العلاقة (2) أما

$$\left.\begin{aligned} F_X[t,x(t,u),u(t)] &= F_x(t,x,u) \\ F_U[t,x(t,u),u(t)] &= F_u(t,x,u) \end{aligned}\right\} \qquad \dots (5)$$

ومن (2) ، (3) نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} X(t,u+\varepsilon\Delta u) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_\tau^t A(s)\,ds}\cdot B(\tau)\ \Delta u(\tau)\ d\tau \qquad \dots (6)$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} A(t) = g_X[t,x(t,u),u(t)] &= \frac{\partial}{\partial x} g(t,x,u)|_{\substack{x=x(t,u)\\ u=u(t)}} \\ B(t) = g_U[t,x(t,u),u(t)] &= \frac{\partial}{\partial u} g(t,x,u)|_{\substack{x=x(t,u)\\ u=u(t)}} \end{aligned}\right\} \qquad \dots (7)$$

وعليه فإن

$$\delta J[u,\Delta u] = \int_{t_0}^{t_1}[F_x\cdot\int_{t_0}^{t} e^{\int_\tau^t A(s)ds}\cdot B(\tau)\cdot\Delta u(\tau)\ d\tau + F_u]\ dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\{F_u[t,x(t,u),u(t)] + \int_\tau^{t_1} F_x[\tau,x(\tau,u),u(\tau)]\, e^{\int_\tau^t A(s)ds} B(t)d\tau\}\Delta u(t)\ dt$$

لكن $\delta J(u,\Delta u) = 0$ ، إذاً

$$F_u[t,x(t,u),u(t)] + \int B(t)\ F_x[\tau,x(\tau,u),u(\tau)]\, e^{-\int_\tau^t A(s)\,ds} d\tau = 0 \qquad \dots (8)$$

حيث $t\in[t_0,t_1]$ وهو الشرط الذي يجعل $J[u]$ تملك قيمة قصوى ، هذا ويمكن التعبير عن (8) كالآتي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F_u}{g_u}\right) + \left(\frac{F_u}{g_u}\right) g_x = F_x \qquad \dots (9)$$

$$F_u(t_1, x(t_1,u), u(t_1)) = 0$$

مثال ٦ -٣ -١:

اوجد التحكم الأقصى للدالي

$$J[u] = \int_0^{\pi} X^2(t)\, Cos^2\, u(t)\; dt$$

حيث $\frac{d}{dt} X(t) = \frac{Sin\, u(t)}{2}$ ، $0 < t < \pi$ ، $X(0) = \frac{\pi}{2}$

الحل

بما أن $X = X(t,u)$ ، **إذاً**

$$X(0) = \frac{\pi}{2} \quad ، \quad X' = \frac{Sin\, u(t)}{2} \qquad \dots (1)$$

وعليه فإن $X(t,u) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \sin u(\tau) d\tau$

لأي تحكم ثابت U . **لكن** $F(t,x,u) = x^2 Cos^2\, u$ ، $g(t,x,u) = \frac{Sin\, u}{2}$ ، **إذاً**

$F_x = 2\, x(t,u) Cos^2\, u(t)$ ، $F_u = -2X^2(t,u)\; Cos\; u(t)\; Sin u(t)$ ،

$g_u = \frac{Cos\; u(t)}{2}$ ، $g_x = 0$. **لكن**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F_u}{g_u}\right) + \left(\frac{F_u}{g_u}\right) g_x = F_x \; ، \; F_u(t_1, x(t_1,u), u(t_1)) = 0$$

إذاً

$\frac{d}{dt}\left(\frac{-2X^2\, Cos\, u\, Sin\, u}{\frac{Cos\, u}{2}}\right) + 0 = 2X\, Cos^2\, u$ ، $X^2 Sin\; u\; Cos\; u = 0$ ، **عندما** $t = \pi$ ،

وعليه فإن

$$t = \pi \text{ عندما }، X^2 Sin\ u\ \ Cos\ u = 0 ، 2\frac{d}{dt}(X^2 Sin\ u) + XCos^2 u = 0 \qquad \dots (1)$$

ومن (1) ، (2) ينتج أن $X[2\frac{d}{dt}(X\ Sin\ u) + 1] = 0$ ، وعليه فإن

$2\frac{d}{dt}(X \sin u) + 1 = 0$ ، وبالتالي فإن

$X\ Sin\ \ u = \frac{-t}{2} + C \qquad \dots (3)$ ، ومنها نجد أن

$Sin\ \ u = \frac{c - \frac{t}{2}}{X}$ ، وبالتالي فإن

$$2X' = \frac{c - \frac{t}{2}}{X} \Rightarrow 2X\ dx = (c - \frac{t}{2})\ dt \Rightarrow X^2 = ct - \frac{t^2}{4} + b$$

لكن $X(0) = \frac{\pi}{2}$ ، إذاً $b = \frac{\pi^2}{4}$ ، وعليه فإن

$$X(t) = \sqrt{ct - \frac{t^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} \qquad \dots (4)$$

ومن (3) ، (4) نجد أن داله التحكم الأقصى

$$Sin\ u(t) = (c - \frac{t}{2})(\frac{\pi^2}{4} + ct - \frac{t^2}{4})^{-\frac{1}{2}} \qquad \dots (5)$$

ومن (4) ، (5) نجد أن

$$0 \le t \le \pi \quad ، \quad X^2\ Cos^2\ u = \frac{\pi^2}{4} - c^2 + 2ct - \frac{t^2}{2}$$

لكن $J[u] = \int_0^\pi X^2 Cos^2 u\ \ dt$ ، إذاً

$$J = \int_0^\pi (\frac{\pi^2}{4} - c^2 + 2ct - \frac{t^2}{2})dt = (\frac{\pi^2}{4} - c^2)\pi + c\pi^2 - \frac{\pi^3}{6}$$

وعندما $c = \frac{\pi}{2}$ ، نجد أن $J = \frac{\pi^3}{3}$ ، وهي اكبر قيمه للدالي $J[u]$ ، (5) تحدد أقصى تحكم عندما $c = \frac{\pi}{2}$ ، أما المعادله (4) فتحدد القيه

للداله $X(t)$ (extremum state function)، عندما $c = \frac{\pi}{2}$.

٦ -٤ : قاعدة القيمة القصوى وبعض تطبيقاتها

سنورد في هذا الجزء قاعدة (مبدأ) القيمة العظمى (maximum principle) لبونترياجن، والتي تحدد أو تبين كيفية حساب التحكم الأمثل، ثم نطبقها في بعض المسائل، وللوصل إلى ما نريد، نفرض أن

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} (t,x,u)\ dt \qquad \dots\ (1)$$

حيث $x = (x_1(t),\dots,x_n(t) \in \mathrm{R}^n$ ، $u(t) = (u_1(t),\dots u_m(m)) \in \mathrm{R}^m$ ،

$x_i' = \frac{dx_i}{dt} = \mathrm{g}_i(t,x,u)$ ، $i = 1,\dots,n$ ، $u(t) \in U$ داله متصلة مقطعياً (متصلة جزءاً جزءا)، $x(t_0) = x_0$ ، $x(t_1) = x$ إما أن تكون معلومه أو تحقق علاقة معينه، $\mathrm{g}_j(t,x,u)$ دوال متصلة بالنسبه لكل من t,x,u ومشتقاتها متصلة بالنسبة إلى x ومركباتها، ولنفرض أن $\lambda(t) = (\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t)) \in \mathrm{R}^n$ متغير مساعد، ولتكن دالة هاملتون معرفة كالأتي

$$H(t,x,u,\lambda) = F(t,x,u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ \mathrm{g}_i(t,x,u)$$

والمطلوب إيجاد $x(t)$ ، $u(t)$ بحيث يكون J اكبر ما يمكن . والآن إلى القاعدة الآتيه بدون إثبات، لأن إثباتها يتطلب معرفة الهندسة التفاضلية وخاصة الفضاء أو السطوح متعددة الطيات (Manifolds) .

مبرهنة ٦ -٤ -١ " قاعدة القيمة العظمى ، Maximal principle "

إذا كان التحكم الممكن $\bar{u}(t)$ ، والحل المتولد منه $\bar{x}(t)$ امثلياً للدالي $J[u]$ ، المعرف في (1)، فتوجد داله غير صفريه $\lambda(t)$ معرفه لكل $t \in [t_0,t_1]$ ، بحيث أن .

(أ) $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}$ ، لكل $i = 1,\ldots,n$

(ب) $\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ ، لكل $i = 1,\ldots,n$

(ج) تكون H اكبر ما يمكن عند $\bar{u}(t)$ ، أي أن $H(t,\bar{x},\bar{u},\lambda) \geq H(t,\bar{x},u,\lambda)$ لكل $u \in u$.

(د) $x_0(t_0) = x_0$ ، $\lambda_i(t_1) = 0$

لاحظ أن كل المشتقات اعلاه تحسب عند $u = \bar{u}(t)$ ، كما أن مجموعة المعادلات في (ا) تمثل معادلات الحركه $x_i' = g_i$ ، والمعادلات في (ا) و (ب) تمثل معادله هاملتون بالشكل القانوني ، كما أن $\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0$ ، وتسمى العلاقات في (د) والتي عددها $2n$ بالشروط الحدية أو الشروط الأعتراضيه (Boundary or transversality conditions) وعليه فإن لحل أي مسأله بهذه القاعده استخدام المعادلات في (ا) و (ب) ثم استخدم المتباينه (ج) للحصول على $\bar{x}(t),\bar{u}(t)$ مستفيداً من الشروط الأعتراضيه لحساب الثوابت .

<u>مثال ٦ -٤ -١</u> (مسألة أقل زمن)

وهي مسألة اقل زمن ممكن للأنتقال من وضع معين إلى وضع آخر مثل $(0,0)$.

إذاً المطلوب :

$$\min_{u\in U} \int_{t_0}^{t_1} dt \quad ، \quad x_1' = g_1(t,x_1,x_2,u) = x_2 \quad ، \quad x_2' = g_2(t,x_1,x_2,u) = u$$

حيث $u \in U$ داله تحكم معرفة كالأتي ، $|u(t)| \leq 1$

<u>الحل :</u>

لاحظ أن المسالة أعلاه تكافئ الآتي

$$\max_u J = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x_1,x_2,u)dt \quad ، \quad F(t,x_1,x_2,u) = -1$$

إذاً $H=-1+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$ ، وتصبح المعادلات في (٦ -٤ -١ب) كالآتي :

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1 \quad ، \quad \frac{d\lambda_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$$

ومنها نجد أن $\lambda_1=c_1$ ، $\lambda_2=c_2-c_1t$ ، حيث c_1 ، c_2 ثوابت . لكن من قاعدة القيمه العظمى نجد أن $J[u]$ أكبر ما يمكن إذا و إذا فقط كان $H(u)$ أكبر ما يمكن لكن $H(u)$ أكبر ما يمكن عندما يكون لكل من u, λ_2 نفس الإشارة .

إذا
$$u(t)=\begin{cases}1 & c_2-c_1t\geq 0\\ -1 & c_2-c_1t<0\end{cases} \quad \text{لكل} \quad t\in[t_0,t_1]$$

وعندما $u=1$ ، نجد أن $x_2'(t)=1$ ، لكل $t\in[t_0,t_1]$ إذاً $x_2=t+b$ ، حيث b ثابت ، ومن العلاقه $x_1'=x_2$ ، نجد أن

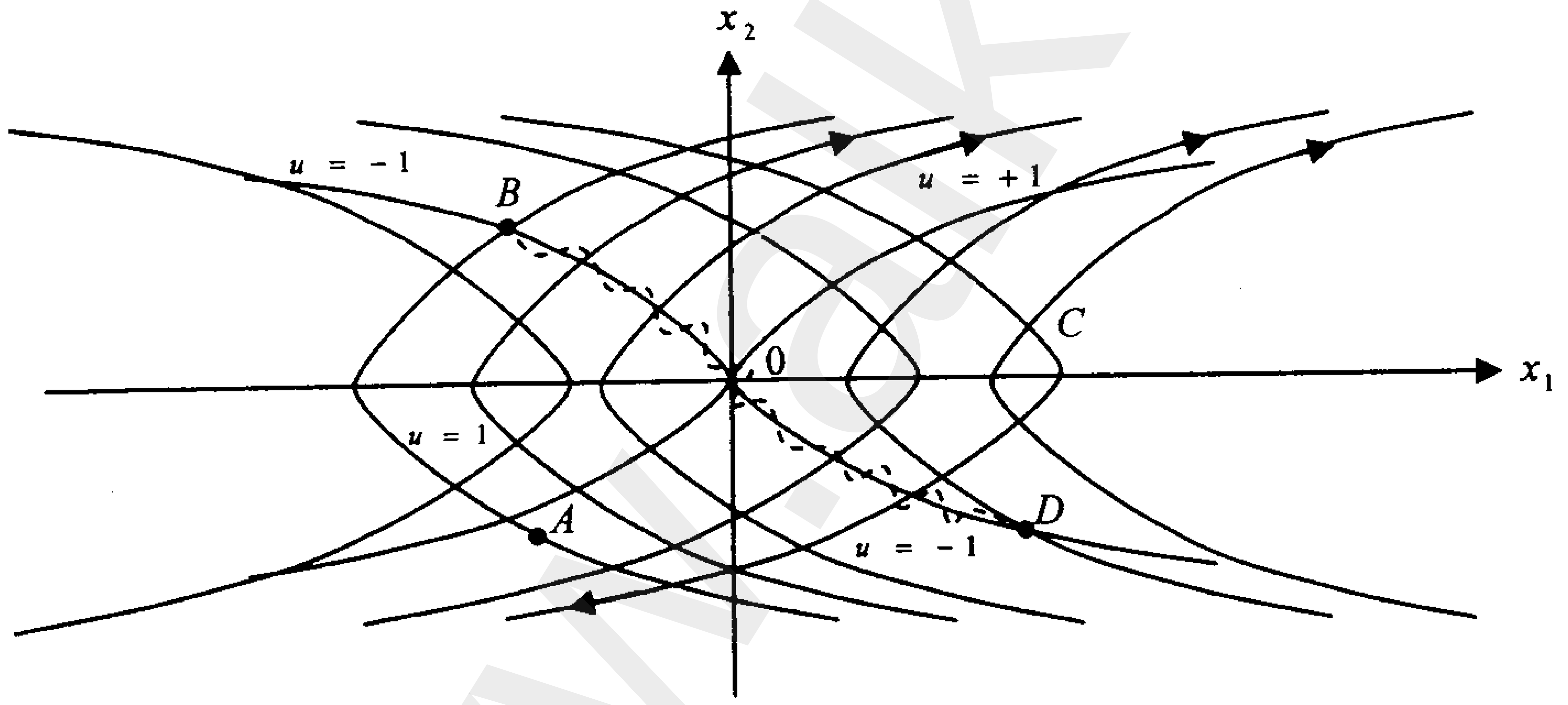
$$x_1=\frac{t^2}{2}+bt+a=\frac{1}{2}(t+b)^2+(a-\frac{b^2}{2})=\frac{1}{2}x_2^2+k$$ ، حيث $k=a-\frac{b^2}{2}$.

وعندما $u=-1$ ، نجد أن $x_2=-t+b_1$ ، $x_1=-\frac{1}{2}x_2^2+m$ حيث b_1, m ثوابت .

إذاً توجد عائلتان من القطوع المكافئة هما

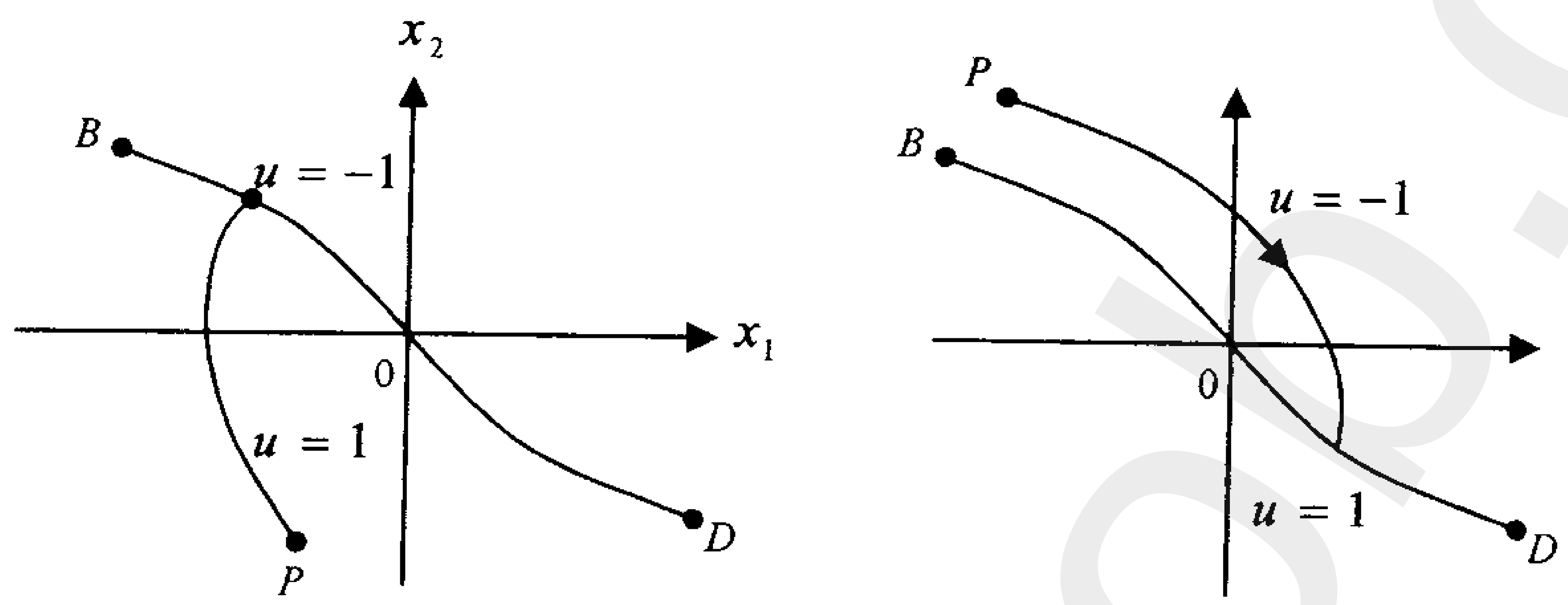
$$x_1=-\frac{1}{2}x_2^2+b_2 \quad ، \quad x_1=\frac{1}{2}x_2^2+k$$

ويمثل الشكل (٦ -١) جزء منها .



شكل (٦ -١)

وتتحرك النقطة (x_1, x_2) إلى الأعلى عندما $\frac{dx_2}{dt} = u = 1$ ، وإلى الأسفل عندما $\frac{dx_2}{dt} = u = -1$ ، وأقصر مسار للوصول إلى نقطه الأصل $(0,0)$ من أي نقطه كانت هو واحد من المسارين الموضحين في الشكل (٦ -٢)



(أ) (ب)

شكل (٦ -٢)

فإذا كانت العملية هي الانتقال من A ، شكل (٦ -١) ، $(u=1\,, x_0 = A)$ ، فان مسار تلك الحالة هو التحرك إلى الأعلى على قوس AB حتى الوصول إلى B ، ثم التحرك على القوس $B0$ " للوصول إلى نقطة الأصل " وهو مقطع من القطع المكافئ $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$ ، $u = 1$ وهذا يعني أن التحرك من أي نقطه P في المستوى إلى نقطه الأصل يتطلب التحرك على قطع من القطع المكافئ $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + m$ ثم الانتقال (التحرك) على جزء من القطع المكافئ $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + k$ أو العكس ويطلق على مثل تلك الحلول أو الحركات التي يتغير فيها التحكم من قيمة إلى آخرى تحكم الخبطه – خبطه (Bang- bang control) .

<u>مثال ٦ -٤ -٢</u> :

أوجد اكبر قيمة للدالي

$$x' = g(t,x,u) = x^2 - u(t) - 3x \quad ، \quad J[u] = \int_0^{t_1} e^{-2t} u^2(t)\,dt$$

الحل

بما أن $H = e^{-2t}u^2 + \lambda(x^2 - u - 3x)$ ، **إذاً**

$\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(2x-3)$ ، **وعليه فإن**

$$2x = 3 - \frac{\lambda'}{\lambda} \qquad \ldots (1)$$

لكن $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ **إذاً** $2u e^{-2t} - \lambda = 0$ ، **وبالتالي فإن**

$$\lambda = 2ue^{-2t} \qquad \ldots (2)$$

، **ومنها نجد أن**

$$\lambda' = -4ue^{-2t} + 2e^{-2t}u' \qquad \ldots (3)$$

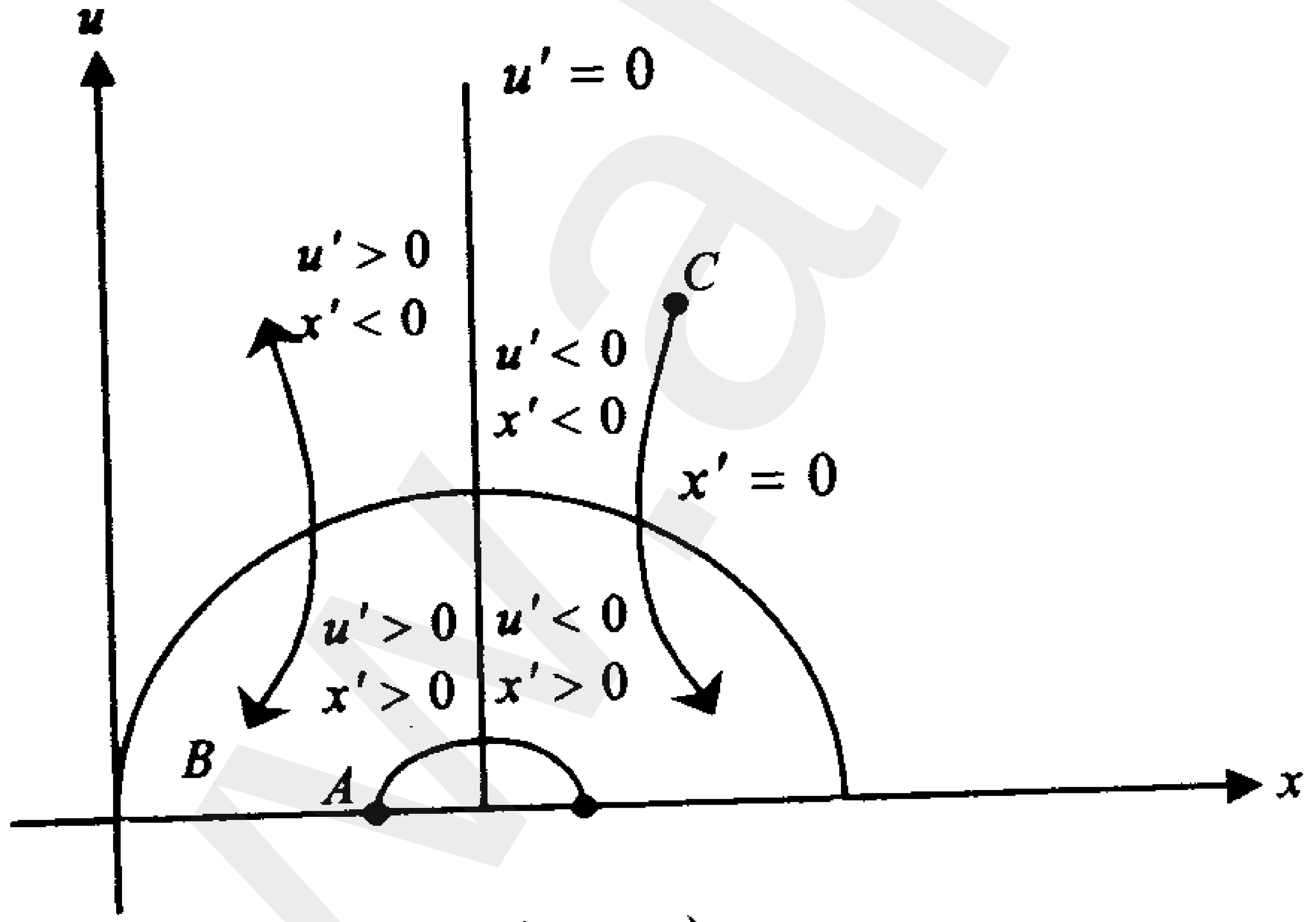
وعليه فإن

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2 + \frac{u'}{u} \qquad \ldots (4)$$

ومن (1) ، (4) **ينتج أن**

$$u' = (5 - 2x)u \qquad \ldots (5)$$

وعندما $x = \dfrac{5}{2}$ ، **نجد أن** $u' = 0$ ، **وعندما** $u = x^2 - 3x$ ، **فإن** $x' = 0$ ، **ويوضح الشكل** (٦ -٣) **مسار الزمن الأمثلة من البداية إلى النهاية :**



شكل(٦ -٣)

تمارين

(١) تصف المعادلتان $x_1' = x_2$, $x_2' = u$ ، حركة جسيم في المستوى . أوجد دالة التحكم $u(t)$ لكي يتحرك الجسيم من النقطة A إلى $B(0,0)$ في أقل زمن ممكن ، حيث $|u(t)| \leq 1$.

(٢) أوجد داله التحكم u التي تجعل الدالي $J = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + u^2)dt$ أقل ما يمكن بشرط أن

$x' = \frac{dx}{dt} = -x + u$ ، $0 < t < 1$ ، $x(0) = e^{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})$.

(٣) $\min J = \int_{t_0}^{t_1} dt$ ، عندما $x' = g(t,x,u) = u$ ، $x_0(t) = x_0$ ، $|u| \leq 1$.

(٤) أوجد اقل قيمه إلى $J[u] = \int_0^x \sqrt{1+u'^2}\; dt$ ، $x' = u$.

(٥) أوجد $u(t)$ التي تجعل الدالي J أكبر ما يمكن عندما

$J[u] = \int_0 e^{-rt}(x_1 + x_2)dt$ ، $x_1' = (x_1 + x_2)u$ ، $x_2' = (x_1 + x_2)(1-u)$ ، $0 \leq u \leq 1$

(٦) أوجد $u(t)$ التي تجعل الدالي J أكبر ما يمكن عندما

$J[u] = \int_0^1 u^2(t)dt$ ، $x'(t) = u$ ، $0 < t < 1$ ، $x(1) = x_1$ ، $x(0) = x_0$ ، $|u| \leq 1$

(٧) تصف المعادلتان $x_1' = x^2$ ، $x_2' = -x_1 + u$ حركه جسيم في المستوى .
أوجد أقل زمن ممكن لتحرك الجسيم من نقطة A إلى $(0,0)$ ، عندما $|u| \le 1$.

(٨) أوجد أقل قيمة للدالي $J[u] = \int_{t_2}^{t_1} dt$ عندما

$x_1' = u$ ، $x_2' = u^2$ ، $|u| \le 1$ ، $x(t_0) = x_0$

◆ المراجع ◆

(1) N . I . Akhiezer " The Calculus of variation" (translated by A . H . Frink) Blaisdell publishing co. New York (1962).

(2) A . M . Arthurs , "Calculus of variations" Routledge and Kegan Paul , London and Boston 1975.

(3) G . A . Bliss , "Calculus of Variations" Open Court publishing Co. Chicago (1962).

(4) M . Boas , "Mathematical methods in The Physical Science" John Wiley and Sons .

(5) R . Courant and D . Hilbert , "Methods of Mathematical Physics" , Vol . 1 , Interscience Publishing Co. New York , (1953).

(6) J . W . Craggs , "Calculus of Variations" George Allen and Unwin Ltd , London 1973.

(7) S . E . Dreyfus , "Dynamic Programming and The Calculus of Variations" Academic Press 1965.

(8) L . Elsgolts , "Differential Equations and the Calculus of Variations" Mir Publishers , Moscow 1970.

(9) I . M Gelfand and S . V . Fomin , "Calculus of Variations" (Translated and Edited by R . A . Silverman) Prentice – Hall , Englewood , New Jersey (1963).

(10) D . Koo , "Elements of Optimization" Springer – Verlag , New York , Berlin (1977).

(11) G . Leitmann , "The Calculus of Variations and Optimal Control" Plenum Press New York and London (1981).

(12) G . F . Simmon , "Differential Equations with Applications and Historical notes" Tata Mc Graw – Hill New Delhi (1984).

(13) D . R . Smith , "Variational Methods in Optimization" Prentice – Hall , Englewood , New Jersey (1974).

◆ دليل الرموز Symbols ◆

الرمز	المعنى
R	مجموعة الأعداد الحقيقيه
$R^2 = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$	الفضاء الأقليدي (المستوى) الثنائي البعد
$R^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in R\}$	الفضاء الأقليدي النوني البعد
$\Vert \ \Vert$	معيار او مقياس
ℓ	فضاء الدوال المتصله على $[a,b]$ ولكل $f \in \ell$ يكون $\Vert f(x) \Vert = \max_{x \in [a,b]} \vert f(x) \vert$
D_1	فضاء الدوال المتصله على $[a,b]$ والتي تكون مشتقتها الأولى متصله على $[a,b]$.
D_n	فضاء الدوال المتصله على $[a,b]$ والتي تكون مشتقاتها $f^{(r)}$ ، $r = 1,\dots,n$ متصله على $[a,b]$.

◆ دليل (فهرس) المصطلحات ◆

(س ، ش)

(م)

(ن)

تم بفضل الله